
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Camus, Charles Etienne Louis, 1(

COUR[S]

DE

MATHÉMATIQ[UES]

TROISIEME PARTIE

ÉLÉMEN[S]

DE

MECHANIQUE STAT[IQUE]

TOME SECOND.

Par *M.* CAMUS, *de l'Académie Royale de*
Examinateur *des Ingénieurs, Professeur &*
perpétuel de l'Académie Royale d'Architect[ure]
noraire de l'Académie de Marine.

NOUVELLE ÉDITION.



D'après la Copie de l'Imprimerie Royale

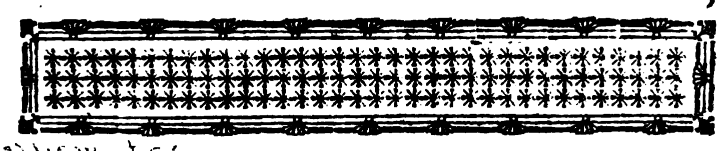
A PARIS,

Chez DURAND, rue du Foin, la première porte coch[ère]
par la rue Saint Jacques, au Griffon.

M. DCC. LIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE D[U ROI]





PRÉFACE.

CE Volume contient les principes dont un Ingénieur a besoin pour connoître les propriétés des machines simples en équilibre, & les proportions des pièces qui demandent le plus de perfection dans les machines composées. Il est divisé en neuf Livres, qui sont une suite des deux Livres renfermés dans le Volume précédent, où j'ai donné la théorie de la composition & décomposition des forces; en sorte que ces neuf Livres joints aux deux premiers, forment les Élémens de la Méchanique Statique, qui devoit faire le sujet de la troisième partie du Cours de Mathématique que M. le Comte d'Argenson m'a ordonné de composer pour les Écoles du Génie.

Dans le troisième Livre, par lequel commence ce Volume, j'examine les propriétés des machines où l'on n'emploie que des cordes pour soûtenir des poids, ou pour retenir plusieurs puissances en équilibre. J'y démontre les rapports de ces puissances relativement à leurs directions, & les directions qu'elles doivent avoir relativement aux quantités de

force qu'elles exercent. Je fais voir comment ces machines funiculaires peuvent servir à peser des marchandises, & l'application qu'on peut faire des principes de leur théorie, pour trouver les tensions des cerceaux dont on relie les vases propres à contenir des liqueurs.

Dans le quatrième Livre, j'explique la théorie de l'équilibre du levier; j'y donne un grand nombre de moyens pour trouver en quels rapports sont les puissances en équilibre sur son appui, & la charge de cet appui; & j'enseigne à trouver les directions que ces puissances & la charge de l'appui doivent avoir relativement à leurs quantités de force. Je fais voir que si la pesanteur supposée constante n'agissoit pas suivant des directions parallèles sur toutes les parties d'un même corps, aucun corps, excepté la sphère, n'auroit un centre de gravité tel qu'on l'a défini dans le premier Livre; & je démontre qu'un corps aura le même centre de gravité, dans le cas où tous ses points seront poussés vers un même centre avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce centre, & dans celui où tous ses points seront poussés par des forces égales & parallèles entr'elles. Enfin, après avoir donné différens Problèmes pour mettre deux puissances en équilibre sur un levier, avec différentes conditions plus ou moins compliquées

qui en peuvent rendre les ſolutions plus ou moins difficiles, je termine ce Livre par l'expoſition des proportions de la balance ordinaire, du peſon ou de la balance romaine, & du peſon danois.

Le cinquième Livre a pour objet les poulies, & les moufles; la manière de multiplier les forces par leur moyen, & de trouver dans tous les cas en quels rapports ſont le poids ſoûtenu par ces machines, la puiſſance qui le retient en équilibre, & les charges des chappes ou des centres des poulies.

Le ſixième traite du tour ou treuil ſimple & compoſé, des roues dentées en général, & de la manière de multiplier les forces par le moyen de ces machines. Comme le tour eſt d'un uſage fréquent & commode pour élever de grands poids, j'en donne les proportions pour tirer de l'eau d'un puits très-profond ou des pierres d'une carrière, en impoſant la condition que l'agent n'ait guère plus de peine qu'il en auroit, ſi les cordes & les ſeaux n'avoient point de peſanteur.

Le ſeptième Livre contient la théorie des poids ſoûtenus ſur des ſurfaces inclinées. J'y examine les conditions ſans leſquelles une puiſſance ne peut pas retenir un corps en équilibre ſur ces ſurfaces; & je donne dans tous les cas différentes méthodes pour trouver

en quels rapports ſont le poids de ce corps; la puiſſance qui le retient, & la charge de la ſurface. Je démontre auſſi comment un corps peſant peut être ſoûtenu en équilibre par pluſieurs ſurfaces inclinées, & j'explique les moyens de trouver en quels rapports ſont le poids de ce corps & les charges de ces ſurfaces: ce qui me donne occaſion de faire voir contre ceux qui cherchent le mouvement perpétuel, qu'une roue dont tous les rayons droits ou courbes, mais ſemblables, ſont chargés de poids égaux mobiles le long de ces rayons, & qui ne ſauroit tourner ſans que les poids d'un côté ſoient plus éloignés du centre que ceux de l'autre côté, eſt toûjours en équilibre, quelle que ſoit la loi de la peſanteur, & quel que ſoit le nombre des forces centrales qui agiſſent ſur tous ces corps, pourvû que chaque principe de force agiſſe également à diſtances égales de ſon centre. Enfin je conſidère comment deux corps ſoûtenus chacun ſur une ſurface inclinée, peuvent ſe retenir mutuellement en équilibre; & je fais encore voir en quels rapports ſont les poids de ces corps, la tenſion du cordon qui les unit & qui les retient, & les charges de ces ſurfaces.

Le Livre huitième eſt employé à examiner la vis & ſes propriétés. J'y démontre le rapport de la puiſſance qui retient la vis ou l'écrou au

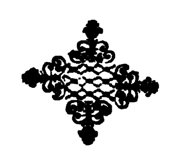
poids dont l'une de ces deux pièces eſt chargée, non-ſeulement dans le cas où la vis eſt verticale, & où la puiſſance agit dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, mais encore dans le cas où la vis eſt inclinée, & dans celui où la puiſſance eſt dirigée dans un plan quelconque. J'explique auſſi les propriétés de la vis ſans fin ſimple, & des machines compoſées de pluſieurs vis ſans fin.

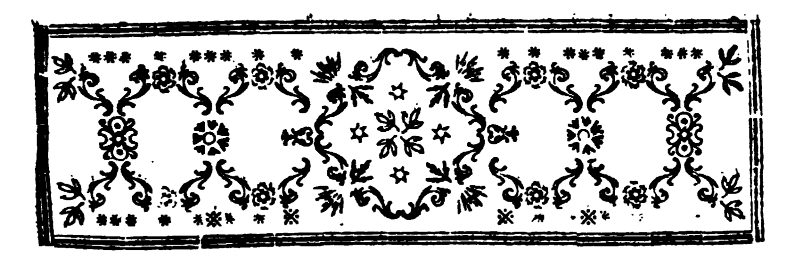
Le neuvième Livre contient les Élémens de la théorie du coin, & quelques-uns de ſes uſages dans les arts méchaniques.

Le dixième Livre a pour objet la plus grande perfection des machines compoſées de roues dentées. J'y détermine la meilleure figure qu'on peut donner aux dents des roues plates & de chan, les diamètres que deux roues qui engrènent enſemble doivent avoir relativement aux nombres de leurs dents, & la quantité de leur engrénage ; & pour rendre l'application de cette théorie plus facile & plus utile, j'y donne des obſervations particulières ſur les pignons de 7, 8, 9, & 10 aîles.

Dans le onzième & dernier Livre, je détermine les nombres de dents que les roues doivent avoir, pour que deux ou pluſieurs d'entr'elles faſſent en même temps des nombres donnés de révolutions. Comme la ſolution de ce Problème eſt extrêmement utile & même

néceſſaire pour la conſtruction des machines, principalement des horloges dont quelques roues doivent faire leurs révolutions dans des temps donnés, & qu'elle eſt ſouvent impoſſible relativement aux grandeurs des roues & des pignons & aux nombres de dents qu'on peut tailler dans leurs circonférences ; je l'ai réſolu, non ſeulement dans le cas où les circonférences des roues & des pignons ſont aſſez grandes, mais encore dans celui où elles ne le ſont pas aſſez, pour recevoir les nombres de dents & d'aîles qui peuvent faire faire aux roues propoſées les nombres donnés de révolutions contemporaines. Il eſt vrai que le Problème ne peut être réſolu dans ce dernier cas, qu'en négligeant quelque choſe ſur le temps de la révolution d'une roue ; mais j'ai fait en ſorte de négliger le moins qu'il étoit poſſible, & toûjours aſſez peu pour que l'erreur accumulée pendant un nombre prodigieux de révolutions, ou pendant la durée de la machine, ne devienne pas ſenſible.





ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE TROISIEME.

De la Machine Funiculaire.

DÉFINITION.

280. UNE Machine où l'on n'emploie que des cordes pour soûtenir un Poids, ou pour contrebalancer plusieurs Puissanees, s'appelle *Machine Funiculaire.*

CHAPITRE PREMIER.

Des Poids soûtenus avec deux cordes seulement, ou avec tant de cordes qu'on voudra assemblées par un même nœud.

THÉOREME.

281. *LORSQUE deux puissances* P, Q *soûtiennent un corps* K *par le moyen de deux cordons* M P, N Q *at-* Fig. 1, 2, 3 & 4.

tachés à deux quelconques M, N *de ses points; la direction verticale* G R *de la pesanteur de ce corps réunie à son centre de gravité* G, *&* *celles des deux cordons* M P, N Q *sont toutes trois dans un même plan vertical, & passent par un même point* A, *ou sont parallèles.*

DÉMONSTRATION.

Puisque le corps *K* est soûtenu par les deux puissances *P*, *Q* dirigées suivant les cordons *MP*, *NQ*; la direction verticale de sa pesanteur réunie à son centre de gravité *G*, & celle de la force résultante des deux puissances *P*, *Q*, sont directement opposées, & sont par conséquent dans une même droite verticale.

Mais tout le poids du corps *K* étant soûtenu par deux cordons qui lui sont attachés en deux points *M*, *N* seulement, on peut aussi supposer que toute sa pesanteur est partagée à ces deux points ou à la droite *MN* qui les joint. Ainsi (*n°*. 23) la droite *MN*, qu'on peut regarder comme la seule chose pesante dans le systême, & les deux cordons *MP*, *NQ* qui la soûtiennent, sont dans un même plan vertical; d'où il suit que ces deux cordons concourent en quelque point *A* ou sont parallèles: & dans ce dernier cas, on peut supposer qu'ils se rencontrent à une distance infinie.

Et comme les deux puissances *P*, *Q* ne peuvent mouvoir la droite *MN* que suivant le plan dans lequel leurs cordons sont dirigés, & que (*n°*. 218) leur résultante passe toûjours par leur point de concours, fût-il infiniment éloigné; il est démontré que la ligne verticale qui renferme la direction de la résultante de ces deux puissances & celle de la pésanteur du corps *K* est dans un même plan vertical avec les deux cor-

dons MP, NQ, & que ces trois directions passent par un même point A, ou sont parallèles. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

282. Si les deux cordons MP, NQ sont parallèles, ils seront nécessairement verticaux, puisqu'ils seront parallèles à la direction verticale GR de la pesanteur du corps K réunie à son centre de gravité G. Fig. 4.

COROLLAIRE II.

283. Si la direction de l'une P des deux puissances est verticale, celle de l'autre puissance Q sera aussi verticale; ainsi les directions des deux puissances P, Q & celle de la pesanteur du corps K seront parallèles. Fig. 4.

Car la direction verticale de la puissance P, ne rencontrera la direction verticale GR de la pesanteur du corps K qu'à une distance infinie; & comme celle de la puissance Q doit concourir en un même point avec les deux premières, il est évident que les directions des deux puissances P, Q & celle de la pesanteur du corps K seront parallèles.

COROLLAIRE III.

284. Lorsqu'un corps K est soûtenu par deux appuis pointus MS, NT considérés sans pesanteur, les droites MS, NT menées par les deux pointes de chaque appui, & la direction verticale GR de la pesanteur du corps, réunie à son centre de gravité G, sont dans un même plan vertical, & concourent en un même point A ou sont parallèles. Fig. 5, 6 & 7.

Car si l'on prolonge les deux droites MS, NT au-dessus du corps K, & qu'on regarde leurs prolon-

gemens *MP*, *NQ* comme des cordons; il eſt évident que ces cordons ſoûtiendroient le corps par les points *M*, *N* de la même manière que le ſoûtiennent les deux appuis *MS*, *NT*. Mais ſi deux cordons ſoûtenoient le corps *K*, leurs directions *MP*, *NQ* & la direction verticale *GR* de la peſanteur du corps *K* ſeroient toutes trois dans un même plan vertical, & paſſeroient par un même point *A* ou ſeroient parallèles. Donc les droites *MS*, *NT* menées par les deux pointes de chaque appui, & la direction *GR* de la peſanteur du corps *K*, ſont dans un même plan vertical, & concourent au même point *A* ou ſont parallèles.

Fig. 7. Il ſuit de là & du Corollaire premier que ſi les deux droites *MS*, *NT* ſont parallèles, elles ſeront verticales; & l'on conclurra comme dans le Corollaire ſecond, que ſi l'une des deux lignes *MS*, *NT* eſt verticale, elles ſeront toutes deux verticales & par conſéquent parallèles à la direction verticale *GR* de la peſanteur du corps *K*.

Remarque.

Fig. 1, 2 & 3. 285. Puiſque les directions *MP*, *NQ* de deux cordons non parallèles qui ſoûtiennent un corps *K*, ſe rencontrent néceſſairement en quelque point *A* de la direction de la peſanteur de ce corps; on peut conſidérer ce point *A* comme un nœud qui aſſemble deux cordons *AP*, *AQ* auxquels ſont appliquées deux puiſſances *P*, *Q* pour ſoûtenir le corps *K*: & comme la direction verticale *GR* de la peſanteur du corps *K* paſſe par ce point *A*, & qu'on peut ſans inconvénient la ſuppoſer appliquée à quel point l'on veut de ſa direction; rien n'empêche de regarder

le syſtème, comme s'il étoit composé de trois cordons *A P*, *A Q*, *A R* aſſemblés par un nœud *A*, & tirés aux trois points *P*, *Q*, *R* par les deux puiſſances *P*, *Q*, & par une force *R* égale à la peſanteur du corps *K*. Ainſi dans la ſuite de ce Traité, lorſqu'on parlera de la peſanteur d'un corps ou d'une force ſoûtenue par deux puiſſances ſeulement, on regardera toûjours ces deux puiſſances & la peſanteur du corps ou la force qu'elles ſoûtiendront, comme trois puiſſances *P*, *Q*, *R* appliquées à trois cordons *A P*, *A Q*, *A R* aſſemblés par un même nœud *A*, & dirigés dans un même plan.

On doit encore remarquer que ſi, au lieu d'oppoſer un poids *K* à deux puiſſances *P*, *Q*, on leur oppoſoit une puiſſance *R* de direction quelconque, les directions des trois puiſſances *P*, *Q*, *R*, qui ſe ſoûtiendroient mutuellement en équilibre, ſeroient encore dans un même plan; & que ce plan ne ſeroit vertical que dans le cas où quelqu'une de ces puiſſances auroit une direction verticale : ainſi ces trois directions paſſeroient par un même point *A* ou ſeroient parallèles.

PROBLEME.

286. *Trois puiſſances* P, Q, R *appliquées à trois cordons* A P, A Q, A R *aſſemblés par un nœud* A, *étant en équilibre; trouver en quels rapports ſont ces trois puiſſances, lorſque les directions de leurs cordons ſont données.* Fig. 8 11 & 12.

SOLUTION.

Les trois puiſſances *P*, *Q*, *R* étant en équilibre, chacune d'elles eſt égale & directement oppoſée à la réſultante des deux autres; en ſorte que ſi l'on prolonge la direction donnée de la puiſſance *R* au-delà du

nœud *A*, d'une quantité quelconque *A F* par laquelle on voudra repréſenter cette puiſſance, ce prolongement *A F* exprimera la valeur & la direction de la force réſultante des deux puiſſances *P*, Q dont les directions ſont auſſi données. Ainſi le Problème ſe réduit à trouver ſur les directions connues des deux puiſſances *P*, Q, deux parties *A B*, *A C* qui puiſſent exprimer deux forces dont la réſultante ſoit repréſentée par *A F*. Or comme on a démontré dans le Livre II différens moyens pour trouver les rapports des trois lignes *A B*, *A C*, *A F* dont les directions ſont connues, on ſe contentera d'en faire une récapitulation ſuccinte dans cette Solution.

I.

Fig. 8, 11 & 12. 287. Puiſque la réſultante des deux puiſſances *P*, Q doit être repréſentée par *A F*, il faudra que cette ligne ſoit la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés contigus ſeront pris ſur les directions *A P*, *A Q* des deux puiſſances *P*, Q; en ſorte que ſi l'on mène par le point *F* les droites *F C*, *F B* parallèles aux cordons *A P*, *A Q*, les puiſſances *P*, Q ſeront repréſentées par les côtés *A B*, *A C* du parallélogramme *A B F C*; ainſi les deux puiſſances *P*, Q & leur réſultante, ou les trois puiſſances *P*, Q, *R* ſeront proportionnelles aux trois droites *A B*, *A C*, *A F* ou *A B*, *B F*, *A F*. C. Q. F. T.

I I.

Fig. 8 & 9. 288. Si l'on fait un triangle *G H I* dont les côtés *G H*, *H I*, *G I* ſoient parallèles aux trois cordons *A P*, *A Q*, *A R*, ces côtés ſeront parallèles aux directions des deux puiſſances *P*, Q, & de leur réſultante; &

comme (*n°.* 232) les deux puissances *P*, *Q* & leur résultante seront proportionnelles aux trois côtés *GH*, *HI*, *GI* du triangle *GHI*, les trois puissances P, Q, *R* seront aussi proportionnelles aux côtés de ce triangle, c'est-à-dire qu'on aura *P*:*Q*:*R*::*GH*:*HI*:*GI*. *C. Q. F. T.*

I I I.

289. Si l'on fait un triangle *MNO* dont les côtés *MN*, *NO*, *MO* soient perpendiculaires aux trois cordons *AP*, *AQ*, *AR*, ces côtés seront perpendiculaires aux directions des deux puissances *P*, Q & de leur résultante. Mais (*n°.* 233) les deux puissances P, *Q* & leur résultante seront proportionnelles aux trois côtés *MN*, *NO*, *MO* du triangle *MNO*. Donc les trois puissances *P*, Q, *R* seront proportionnelles aux mêmes côtés *MN*, *NO*, *MO*. C. Q. F. T. Fig. 8 & 10.

Au lieu de faire un triangle MNO, *dont les côtés* MN, NO, MO *soient perpendiculaires sur les directions données* AP, AQ, AR *des trois puissances* P, Q, R, *il est aisé de voir qu'on pourra faire un triangle* abf, *dont les côtés* ab, bf, af *fassent des angles égaux* acA, beA, adA *avec les directions des mêmes puissances. Car le triangle* abf *sera semblable au triangle* ABF; *& comme on a trouvé* P : Q : R :: AB : BF : AF, *on aura aussi* P : Q : R :: ab : bf : af.

I V.

290. Par le nœud *A* d'où partent les trois cordons ou les directions des trois puissances *P*, Q, *R* qu'on suppose en équilibre, ayant décrit une circonférence de cercle *AMGN* qui rencontre en *M*, *N* les directions des deux puissances *P*, Q, & qui coupe Fig. 11 & 12.

A iiij

en quelque point *G* la direction de leur résultante ou le prolongement *AG* de la direction de la troisième puissance *R*; si l'on tire les trois cordes *GN*, *GM*, *MN*, on trouvera (*n*°. 234) que les deux puissances *P*, *Q* & leur résultante sont proportionnelles à ces trois cordes *GN*, *GM*, *MN*. Donc les trois puissances *P*, *Q*, *R* sont aussi proportionnelles aux mêmes cordes *GN*, *GM*, *MN*: c'est-à-dire que la quantité de force de chacune de ces trois puissances sera représentée par la corde qui se terminera aux directions des deux autres. *C. Q. F. T.*

V.

Fig. 11 & 12. 291. On a démontré (*n*°. 235) que les deux cordes *GM*, *GN* font des angles égaux avec les directions des deux puissances *P*, *Q*; que les deux cordes *MN*, *GM* font des angles égaux avec les directions des deux puissances *Q*, *R*; & que les deux cordes *MN*, *GN* font des angles égaux avec les directions des deux puissances *P*, *R*. Ainsi puisqu'on vient de trouver que $P : Q : R :: GN : GM : MN$, c'est-à-dire que

$$\left\{\begin{array}{l} P : Q :: GN : GM \\ Q : R :: GM : MN \\ P : R :: GN : MN \end{array}\right\};$$

il est clair que deux quelconques des trois puissances *P*, *Q*, *R*, qui se soûtiennent mutuellement en équilibre, sont en raison réciproque de deux droites qui font des angles égaux avec leurs directions, & qui partent d'un même point de la direction de la troisième puissance. *C. Q. F. T.*

VI.

292. Comme des perpendiculaires tirées d'un

point quelconque de la direction de quelqu'une des puissances P, Q, R sur les directions des deux autres, feront des angles égaux avec leurs directions; il est évident que deux quelconques des trois puissances P, Q, R en équilibre, sont en raison réciproque des lignes menées d'un point quelconque de la direction de la troisième perpendiculairement sur leurs directions. *C. Q. F. T.*

VII.

293. On a démontré (*n°.* 237) que, dans le cas où les directions des deux puissances P, Q & celle de leur résultante concourent en un même point A, si l'on tire une droite MON qui rencontre les directions de ces trois forces en trois points M, N, O, les deux puissances P, Q & leur résultante seront proportionnelles aux trois produits Fig. 11 & 12.

$$AM \times NO,\ AN \times MO,\ AO \times MN.$$

Ainsi puisque la puissance R est égale à la résultante des deux puissances P, Q, on aura aussi

$$P : Q : R :: AM \times NO : AN \times MO : AO \times MN;$$

c'est-à-dire que la quantité de force de chacune des trois puissances P, Q, R sera représentée par le produit fait de la partie de sa propre direction, comprise entre le nœud A & la droite MON, multipliée par la partie de cette droite MON, terminée par les directions des deux autres puissances. *C. Q. F. T.*

VIII.

294. Si la puissance R a été prise pour la pesanteur d'un corps K soûtenu par deux puissances P, Q appliquées à deux cordons parallèles MP, NQ; Fig. 4.

le point *A*, où concourront les directions des trois puissances *P*, *Q*, *R*, sera infiniment éloigné de la droite *MON*. Ainsi les trois droites infinies *AM*, *AN*, *AO* pourront être regardées comme des lignes égales; & au lieu d'avoir comme dans la Solution précédente $P : Q : R :: AM \times NO : AN \times MO : AO \times MN$, on aura $P : Q : R :: NO : MO : MN$; c'est-à-dire que si les directions de trois puissances parallèles sont rencontrées en trois points *M*, *N*, *O* par une même droite *MON*, la quantité de force de chacune de ces trois puissances sera représentée par la partie de la droite *MON*, qui se trouvera comprise entre les directions des deux autres. C. Q. F. T.

Cette huitième Solution pouvoit être déduite de la cinquième, puisque NO, MO, MN *sont trois lignes qui font des angles égaux avec les directions des trois puissances* P, Q, R.

IX.

Fig. 8. 295. On a vû (*n°.* 240) que deux puissances *P*, Q & leur résultante sont trois forces dont chacune peut toûjours être représentée par le sinus de l'angle que les directions des deux autres font entr'elles. Or en prolongeant la direction de la puissance *R* au-delà du nœud *A*, son prolongement *AF* sera la direction de la résultante des deux autres puissances *P*, Q. Donc les deux puissances *P*, *Q* & leur résultante ou la puissance *R* qui lui est égale, seront proportionnelles aux sinus des trois angles *CAF*, *BAF*, *BAC*: c'est-à-dire qu'on aura $P : Q : R :: S.\,CAF : S.\,BAF : S.\,BAC$. C. Q. F. T.

X.

296. Comme les sinus des angles *CAF*, *BAF* font égaux aux sinus de leurs supplémens *QAR*, *PAR*, & qu'on vient de trouver dans l'article précédent $P : Q : R :: S._{CAF} : S._{BAF} : S._{BAC}$, on aura aussi $P : Q : R :: S._{QAR} : S._{PAR} : S._{BAC}$; c'est-à-dire que la quantité de force de chacune des trois puissances *P*, *Q*, *R* sera représentée par le sinus de l'angle compris entre les cordons des deux autres puissances, ou par le sinus de l'angle au travers duquel passera le prolongement de sa direction. C. Q. F. T. Fig. 8.

COROLLAIRE.

297. Puisque trois puissances *P*, *Q*, *R* en équilibre, dont les directions ne sont point parallèles, peuvent toûjours être représentées par les trois côtés *GH*, *HI*, *GI* d'un triangle *GHI*, & que chaque côté d'un triangle est toûjours moindre que la somme, & plus grand que la différence des deux autres; il est évident que chacune des trois puissances en équilibre, dont les directions ne sont point parallèles, est aussi plus petite que la somme & plus grande que la différence des deux autres. Fig. 8 & 9.

Mais si les trois puissances en équilibre ont des directions parallèles, il suit de la huitième Solution que chacune d'elles sera égale à la somme ou à la différence des deux autres, suivant qu'elle sera ou ne sera pas la plus grande des trois. Car dans ce cas la puissance *R* sera représentée par la droite entière *MN*, & les deux autres puissances *P*, *Q* seront Fig. 4.

représentées par les deux parties *NO*, *MO* de la même ligne.

PROBLEME.

Fig. 8, 11, 12 & 13. 298. *Les quantités de force de trois puissances* P, Q, R *qu'on doit appliquer à trois cordons* AP, AQ, AR *assemblés par un même nœud* A, *étant données; trouver les directions qu'il faut donner à ces cordons pour mettre les trois puissances* P, Q, R *en équilibre.*

SOLUTION.

On vient de voir (*n°.* 297) qu'aucune des trois puissances données ne doit être plus grande que la somme, ni plus petite que la différence des deux autres. Or quoiqu'il n'y ait qu'un seul arrangement de cordons assemblés par un même noeud, pour mettre en équilibre de telles puissances dont les quantités de force sont données, il y a un si grand nombre de moyens pour déterminer cet arrangement, qu'il n'est pas possible de les expliquer tous dans cette Solution. Ainsi l'on se contentera d'exposer les principaux, dont les autres peuvent être regardés comme des conséquences plus ou moins éloignées.

Pour parvenir à trouver l'arrangement demandé des trois cordons *AP*, *AQ*, *AR*, il faut observer que les trois puissances *P*, *Q*, *R*, qui sont connues par leurs quantités de force seulement, devant être en équilibre, chacune d'elles doit être égale & directement opposée à la résultante des deux autres. Donc si l'on prend à volonté un point *A* pour le nœud des cordons, & une droite *AR* pour la direction de la puissance *R*, & qu'on prolonge cette ligne au-

delà du nœud *A* de la quantité *A F* par laquelle on voudra exprimer la valeur de la puiſſance *R*, ce prolongement *A F* repréſentera la force qui doit être la réſultante des deux puiſſances *P*, *Q*. Ainſi le Problème ſe réduira à diſpoſer les deux cordons *A P*, *A Q* par rapport à *A R*, de manière que les deux puiſſances *P*, *Q* qu'on leur appliquera aient une réſultante repréſentée par *A F*. Cela poſé, on va donner pluſieurs Solutions du Problème propoſé.

I.

299. Le prolongement *A F* de la droite *A R* étant pris, comme nous l'avons dit, pour repréſenter la puiſſance *R* ou la réſultante des deux puiſſances *P*, *Q*; on fera ſur *A F* un triangle *A B F* dont les trois côtés *A B*, *B F*, *A F* ſoient proportionnels aux quantités de force données des trois puiſſances *P*, *Q*, *R*: puis ayant mené *A C* parallèle à *B F*, & ayant dirigé les trois cordons *A P*, *A Q*, *A R* ſuivant les droites *A B*, *A C* & le prolongement de *F A*, on leur appliquera les trois puiſſances *P*, *Q*, *R* qui feront en équilibre. C. Q. F. T. Fig. 8, 11 & 12.

Car ſi l'on mène *F C* parallèle à *A B*, on aura un parallélogramme *A B F C* dont les côtés oppoſés *A C*, *B F* ſeront égaux. Ainſi puiſque (*conſt.*) $P : Q : R :: AB : BF : AF$, on aura auſſi $P : Q : R :: AB : AC : AF$. Mais en nommant *F* la réſultante des deux puiſſances *P*, *Q*, on aura auſſi (n°. 228) $P : Q : F :: AB : AC : AF$. On aura donc $P : Q : R :: P : Q : F$; & par conſéquent la puiſſance *R* ſe trouvera égale à la force réſultante *F* des deux puiſſances *P*, *Q*, qui lui eſt directement oppoſée; ainſi ces deux forces ſe détruiront

mutuellement : d'où il suit que les trois puissances *P*, Q, *R* seront en équilibre.

I I.

[Fig. 8, 9 & 10. 300. On fera un triangle $\left\{\begin{matrix} GHI \\ MNO \end{matrix}\right\}$ dont les trois côtés $\left\{\begin{matrix} GH, HI, GI \\ MN, NO, MO \end{matrix}\right\}$ soient proportionnels aux quantités de force données des trois puissances *P*, Q, *R*. Puis d'un point quelconque *A* qu'on prendra pour le nœud des cordons dans le plan du triangle *MNO*, on dirigera les trois cordons *AP*, *AQ*, *AR* $\left\{\begin{matrix} \text{parallèlement} \\ \text{perpendiculairement} \end{matrix}\right\}$ aux trois côtés $\left\{\begin{matrix} GH, HI, GI \\ MN, NO, MO \end{matrix}\right\}$ du triangle $\left\{\begin{matrix} GHI \\ MNO \end{matrix}\right\}$; & appliquant à ces trois cordons les trois puissances *P*, Q, *R*, elles seront en équilibre. C. Q. F. T.

Car si l'on prolonge au-delà du nœud *A*, la direction de la puissance *R*, & que d'un point quelconque *F* de ce prolongement l'on mène les droites *FC*, *FB* parallèlement aux cordons des deux puissances P, Q; on aura un parallélogramme *ABFC* dont la moitié triangulaire *ABF* aura les côtés $\left\{\begin{matrix} \text{parallèles} \\ \text{perpendiculaires} \end{matrix}\right\}$ à ceux du triangle $\left\{\begin{matrix} GHI \\ MNO \end{matrix}\right\}$; en sorte que l'on aura $\left\{\begin{matrix} GH : HI : GI \\ MN : NO : MO \end{matrix}\right\} :: AB : BF : AF$ ou $:: AB : AC : AF$. Ainsi puisque (*constr.*) $P : Q : R :: \left\{\begin{matrix} GH : HI : GI \\ MN : NO : MO \end{matrix}\right\}$, on aura aussi $P : Q : R :: AB : AC : AF$.

Mais nommant *F* la résultante des deux puissances *P*, Q, on aura (n°. 228) $P : Q : F :: AB : AC : AF$, & par conséquent $P : Q : R :: P : Q : F$; ainsi la

résultante des deux puissances P, Q sera égale à la puissance *R* qui lui est directement opposée; d'où il suit que les trois puissances *P*, Q, *R* seront en équilibre.

On démontrera de la même manière que si l'on fait un triangle a b f *dont les côtés* a b, b f, a f *soient proportionnels aux quantités de force données des trois puissances* P, Q, R, *& qu'après avoir pris dans le plan ou la continuation du plan de ce triangle, un point* A *pour le nœud des cordons, l'on dirige ces cordons* A P, A Q, A R *de manière qu'ils fassent des angles égaux* a c A, b e A, a d A *avec les trois côtés* a b, b f, a f *du triangle* a b f; *les trois puissances* P, Q, R *appliquées à ces trois cordons seront en équilibre.* Fig. 8.

III.

301. On fera un triangle *MGN* dont les trois côtés G*N*, G*M*, *M N* soient proportionnels aux quantités de force données des trois puissances *P*, Q, *R*. Puis ayant circonscrit à ce triangle un cercle *AMGNA*, & ayant choisi un point quelconque *A* de sa circonférence pour y placer le nœud des trois cordons, on mènera les cordes *A M*, *A N*, *A G*; & une ou deux au plus de ces cordes, avec les prolongemens de deux autres, ou le prolongement de la troisième au-delà du nœud *A*, seront les directions des trois puissances *P*, Q, *R*; c'est-à-dire que (*Fig.* 11) les deux cordes de cercle *A M*, *A N* & le prolongement *A R* de la troisième *A* G, feront les directions qu'il faudra donner aux trois puissances *P*, Q, *R* pour les mettre en équilibre; & (*Fig.* 12) la seule corde *A M* avec les prolongemens *A* Q, *A R* des deux autres cordes *A N*, *A* G, seront les directions Fig. 11 & 12.

des cordons auxquels il faudra appliquer les mêmes puissances pour les mettre en équilibre.

Car les quantités de force des deux puissances *P*, Q étant représentées (*constr.*) par *GN*, *GM*, leur résultante (*n°.* 234) & la puissance *R* (*constr.*) seront toutes deux exprimées, quant à leur quantité de force, par la même droite *MN*: & comme cette résultante & la puissance *R* seront dirigées l'une de *A* vers G, l'autre de *A* vers *R*; elles seront égales & directement opposées; ainsi elles se détruiront mutuellement, & par conséquent les trois puissances P, Q, *R* seront en équilibre.

Si l'on fait attention que les deux cordes {GM, GN / MN, GM / MN, GN} *font des angles égaux* {GMS, GNA / ANO, AGM / AMN, AGN} *avec les directions des deux puissances* {P, Q / Q, R / P, R} *auxquelles elles sont réciproquement proportionnelles, & qu'il n'y a que cela d'essentiel dans la position des cordons* A P, A Q, A R *auxquels on doit appliquer les trois puissances* P, Q, R *qu'on veut mettre en équilibre; on verra aisément que si par un point quelconque* a *pris dans le plan du triangle*
Fig. 13. G M N *ou dans sa continuation, l'on mène deux droites* a p, a q *qui fassent des angles égaux* a m G, a n G *avec les droites* G M, G N *réciproquement proportionnelles aux deux puissances* P, Q; *& qu'on tire aussi par le même point* a *une droite* g a r, *de manière que cette droite & la droite* a p *fassent des angles égaux* a g N, a t N *avec les deux droites* G N, M N *réciproquement proportionnelles aux deux puissances* R, P; *les trois puissances* P, Q, R *pourront être appliquées à trois cordons dirigés suivant*

suivant a p, a q, a r, *pour se soûtenir mutuellement en équilibre; car trois cordons dirigés suivant* a p, a q, a r *seront disposés entr'eux comme les trois cordons* AP, AQ, AR.

I V.

302. Puisque les trois puissances *P*, *Q*, *R* proportionnelles aux côtés contigus *AB*, *AC* & à la diagonale *AF* d'un parallélogramme *ABFC*, sont en équilibre lorsqu'elles sont dirigées suivant ces deux côtés *AB*, *AC* & le prolongement *AR* de la même diagonale, & que les quantités de force de ces trois puissances sont données; on connoîtra les deux côtés *AB*, *AC* & la diagonale *AF* de ce parallélogramme, ou les côtés *AB*, *BF*, *AF* de sa moitié triangulaire *ABF*. Ainsi (*Géom. n°.* 581) on trouvera les trois angles *BAF*, *CAF*, *BAC*; & par conséquent les trois angles *PAR*, *QAR*, *PAQ* que les trois cordons *AP*, *AQ*, *AR* doivent faire entr'eux, pour que les trois puissances *P*, *Q*, *R* se soûtiennent mutuellement en équilibre. *C. Q. F. T.* Fig. 8.

THEOREME.

303. *Le nœud* A *dont partent les cordons de trois puissances* P, Q, R *étant au dedans d'un triangle* BCE, *& les trois cordons* AP, AQ, AR *étant dirigés par les sommets des angles* B, C, E *de ce triangle:* Fig. 14.

1°. *Si les trois puissances* P, Q, R *sont en équilibre & proportionnelles aux parties* AB, AC, AE *de leurs directions, comprises dans le triangle* BCE; *le nœud* A *des trois cordons sera le centre de gravité de ce triangle.*

2°. *Et réciproquement si le nœud* A *des trois cordons*

est le centre de gravité du triangle B C E, *& que les trois puissances soient proportionnelles aux parties* A B, A C, A E *de leurs cordons, comprises dans ce triangle; ces trois puissances seront en équilibre.*

3°. *Si les trois puissances* P, Q, R *sont en équilibre, & que le nœud* A *des trois cordons soit le centre de gravité du triangle* B C E; *ces trois puissances seront proportionnelles aux parties* A B, A C, A E *de leurs directions, comprises dans le triangle* B C E.

Démonstration.

Partie I. Si la droite *BC* qui joint les extrémités des deux droites *A B*, *A C* proportionnelles aux deux puissances *P*, *Q*, est divisée en deux parties égales en G, & que l'on mène par ce point G une droite *A G F* double de *A G*; cette droite représentera (*n*°. 250) la quantité de force & la direction de la résultante des deux puissances *P*, Q.

Mais puisque les trois puissances *P*, *Q*, *R* représentées par *A B*, *A C*, *A E* sont en équilibre, la résultante *A F* des deux puissances *P*, *Q* sera égale & directement opposée à la puissance *R*; ainsi *F A E* sera une ligne droite qui coupera *B C* en deux parties égales, & *A G* moitié de *A F* vaudra la moitié de *A E* ou le tiers de *G E*. Donc (*n*°. 35) le noeud *A* des trois cordons sera le centre de gravité du triangle *B C E*. c. q. f. 1°. d.

Partie II. Puisque le noeud *A* des trois cordons est supposé placé au centre de gravité du triangle *B C E*; si l'on prolonge le cordon *A E* au-delà du noeud *A* jusqu'au côté *B C*, son prolongement *A G* divisera ce côté en deux parties égales en *G*, & l'on aura $AG = \frac{1}{2} AE$, ou $2\,AG = AE$.

Mais on a trouvé (*Part. I.*) que $A F$ ou $2 A G$ est la résultante des deux puissances P, Q. Ainsi la puissance R représentée par $A E$ est égale & directement opposée à la résultante $A F$ des deux puissances P, Q; & par conséquent les trois puissances P, Q, R représentées par $A B$, $A C$, $A E$, & dont les cordons partent d'un noeud A placé au centre de gravité du triangle $B C E$, sont en équilibre. *C. Q. F.* 2°. *D.*

PARTIE III. Puisque les trois puissances P, Q, R sont supposées en équilibre; si l'on représente la puissance R par la partie $A E$ de sa direction comprise dans le triangle $B C E$, la résultante des deux autres puissances P, Q sera exprimée par une droite $A F$ égale à $A E$, & prise sur le prolongement de $A E$ au-delà du noeud A.

Mais puisque (*hyp.*) le noeud A des trois cordons est au centre de gravité du triangle $B C E$, le prolongement $A F$ de $A E$, divisera $B C$ en deux parties égales, & l'on aura comme ci-devant $2 A G = A E = A F$; ainsi les deux droites $B C$, $A F$ se diviseront mutuellement en deux parties égales, & seront par conséquent les deux diagonales d'un parallélogramme $A B F C$. Donc la résultante $A F$ des deux puissances P, Q se décomposera en deux forces représentées par les parties $A B$, $A C$ des directions de ces puissances; d'où il suit que ces puissances elles-mêmes doivent être exprimées par les mêmes parties de leurs directions, comprises dans le triangle $B C E$, en supposant, comme nous l'avons fait, que la puissance R soit représentée par la partie $A E$ de sa direction, comprise dans le même triangle. *C. Q. F.* 3°. *D.*

PROBLEME.

Fig. 15. 304. *Les quantités de force de quatre puissances* P, Q, R, S *qu'on doit appliquer à quatre cordons* AP, AQ, AR, AS *assemblés par un nœud* A, *étant données; trouver les directions qu'il faut donner à ces cordons pour mettre les puissances* P, Q, R, S *en équilibre.*

SOLUTION.

Pour mettre quatre puissances en équilibre, il suffit de faire en sorte que la résultante de deux d'entr'elles soit égale & directement opposée à la résultante des deux autres: & comme on peut rendre ces deux résultantes égales & directement opposées d'une infinité de façons, en variant à l'infini les angles des directions des puissances données, on pourra mettre quatre puissances en équilibre d'une infinité de manières, pourvû que chacune d'elles soit moindre que la somme des trois autres: en voici un exemple.

Ayant représenté les quantités de force des quatre puissances données *P*, *Q*, *R*, *S* par des parties *AB*, *AC*, *AD*, *AE* de leurs directions, on fera un parallélogramme *ABFC* qui ait pour côtés contigus les lignes *AB*, *AC*, par lesquelles deux puissances *P*, Q sont représentées, en faisant en sorte que sa diagonale ne soit ni plus grande que la somme, ni plus petite que la différence des deux droites *AD*, *AE* par lesquelles les deux autres puissances *R*, *S* sont représentées; ce qu'on pourra faire d'une infinité de manières en variant l'angle des cordons *AP*, *AQ*. Le parallélogramme *ABFC* étant construit, sa diagonale *AF* représentera la résultante des deux puissances *P*, Q (*n°*. 228).

On prolongera la diagonale *A F* au-delà du nœud *A*, & ayant fait son prolongement *A G* = *A F*, on dirigera les deux puissances *R*, *S* de manière que leur résultante soit représentée par *A G*. Pour cela on fera sur *A G* un triangle *A D G* dont les deux côtés *A D*, *D G* soient égaux aux deux droites par lesquelles on a représenté les deux puissances *R*, *S*; puis ayant dirigé la puissance *R* suivant *A D*, & la puissance *S* suivant une droite *A S* parallèle à *D G*, les quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S* appliquées aux quatre cordons *A P*, *A Q*, *A R*, *A S* feront en équilibre.

Car puisque les deux parallèles *D G*, *A E* sont égales (*constr.*), si l'on tire la droite *G E*, on aura un parallélogramme *A D G E*, dont la diagonale *A G* représentera la résultante des deux puissances *R*, *S* exprimées par *A D*, *A E*: & comme cette résultante *A G* est (*constr.*) égale & directement opposée à la résultante *A F* des deux premières puissances *P*, *Q*, les quatre puissances P, Q, R, *S* feront en équilibre.

On pourra prendre de même *A f* pour représenter la résultante des deux puissances *P*, *Q*, pourvû que cette droite ne soit pas plus grande que la somme, ni plus petite que la différence des deux puissances *P*, Q représentées par *A B*, *A C*, & qu'elle ne soit pas aussi plus grande que la somme, ni plus petite que la différence des deux autres puissances *R*, *S* exprimées par *A D*, *A E*; afin que l'on puisse prendre de l'aurre côté du nœud une droite *A g* = *A f* pour représenter la résultante des deux puissances *R*, *S*.

Cela posé, on pourra faire sur *A f* un triangle *A b f* dont les côtés *A b*, *b f* soient égaux aux lignes *A B*, *A C* qui représentent les deux puissances *P*, *Q*; & sur *A G*, un triangle *A d g* dont les côtés *A d*, *d g*

soient égaux aux lignes *A D*, *A E* qui représentent les deux autres puissances *R*, *S*; enfin l'on pourra diriger la puissance *P* suivant *A b*, la puissance Q suivant *A c* parallèle à *b f*, la puissance *R* suivant *A d*, & la puissance *S* suivant une droite *A e* parallèle à *d g*; & les quatre puissances *P*, Q, *R*, *S* feront encore en équilibre dans cette nouvelle disposition de cordons, différente de la première.

Il est évident qu'on pourra varier de la même manière & à l'infini les directions des quatre puissances données *P*, Q, *R*, *S*, en les tenant toûjours en équilibre.

THÉOREME.

Fig. 16. 305. *Quatre puissances* P, Q, R, S *sont en équilibre, lorsque trois d'entr'elles, par exemple,* Q, R, S, *sont représentées par les arêtes contigues* A B, A C, A E *d'un angle solide de parallélépipède, & que la quatrième* P *est représentée par une droite* A O *égale & directement opposée à la diagonale* A G *du même parallélépipède.*

Et réciproquement lorsque quatre puissances P, Q, R, S *appliquées à quatre cordons* A P, A Q, A R, A S *assemblés par un nœud* A, *qui ne sont pas tous dans un même plan, sont en équilibre; trois quelconques d'entr'elles, par exemple,* Q, R, S *sont représentées par les arêtes contigues* A B, A C, A E *d'un même parallélépipède, & la quatrième* P *est représentée par une droite* A O *égale & directement opposée à la diagonale* A G *de ce parallélépipède.*

Démonstration.

Les arêtes opposées *A E*, *D G* du parallélépipède

étant égales & parallèles ; si l'on joint les extrémités de ces arêtes en tirant les diagonales *A D*, *E G* des faces opposées *A B D C*, *E F G H*, on aura un parallélogramme *A D G E* dont la diagonale *A G* sera celle du parallélépipède. Cela posé, on démontrera aisément les deux parties du Théorème.

PARTIE I. Puisque les deux puissances *Q*, *R* sont représentées par les arêtes *A B*, *A C*; qui servent de côtés à la face parallélogrammique *A B D C*, leur résultante sera exprimée (*n°*. 228) par la diagonale *A D* de la même face.

La résultante des deux puissances *Q*, *R* étant représentée par *A D*, & la puissance *S* par *A E*; la résultante des trois puissances *Q*, *R*, *S* sera représentée par la diagonale *A G* du parallélogramme *A D G E*, qui est aussi celle du parallélépipède.

Mais (*hyp.*) la puissance *P* est exprimée par une droite *A O* égale & directement opposée à la diagonale *A G* du parallélépipède.

Donc la puissance *P* est égale & directement opposée à la résultante des trois puissances *Q*, *R*, *S*; & par conséquent les quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S* sont en équilibre. *C. Q. F.* 1°. *D.*

PARTIE II. Quelles que puissent être les longueurs des trois droites *A B*, *A C*, *A E* qui représenteront les trois puissances *Q*, *R*, *S* & qui ne seront pas dans un même plan, on pourra toûjours regarder ces trois lignes comme les arêtes contigues d'un parallélépipède *A B D C E F G H*, & la résultante de ces trois puissances sera représentée (*Part. I.*) par la diagonale *A G* du même parallélépipède.

Mais puisque les quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S* sont supposées en équilibre, l'une *P* d'entr'elles doit

nécessairement être égale & directement opposée à la force résultante des trois autres.

Donc la puissance *P* doit être représentée par une droite *A O* égale & directement opposée à la diagonale *A G* d'un parallélépipède dont les arêtes *A B*, *A C*, *A E* contigues à cette diagonale représenteront les trois autres puissances Q, *R*, *S*. C. Q. F. 2°. D.

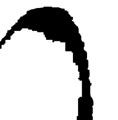
CORLLAIRE.

Fig. 16. 306. Comme on peut (n°. 304) mettre les quatre puissances *P*, Q, *R*, *S* en équilibre, en dirigeant leurs proportionnelles *A O*, *A B*, *A C*, *A E* d'une infinité de façons, & que chaque arrangement des mêmes proportionnelles donnera un parallélépipède dont les proportionnelles *A B*, *A C*, *A E* feront les arêtes contigues, & dont la diagonale *A G* sera égale à *A O*; il est évident qu'on peut faire une infinité de parallélépipèdes différens qui auront tous la même diagonale *A G* & les arêtes contigues *A B*, *A C*, *A E* de même grandeur, mais dirigées différemment.

THÉOREME.

Fig. 17. 307. *Le nœud* A *d'où partent les cordons de quatre puissances* P, Q, R, S, *étant au dedans d'une pyramide triangulaire* E B C D, *& les quatre cordons* A P, A Q, A R, A S *étant dirigés par les sommets des angles de cette pyramide*:

1°. *Si les quatre puissances* P, Q, R, S *sont en équilibre & proportionnelles aux parties* A E, A B, A C, A D *de leurs directions comprises dans la pyramide; le nœud* A *des quatre cordons sera le centre de gravité de cette pyramide.*



2°. *Si le nœud* A *des quatre cordons est le centre de gravité de la pyramide* E B C D, *& que les quatre puissances* P, Q, R, S *soient proportionnelles aux parties* A E, A B, A C, A D *de leurs directions, comprises dans cette pyramide; ces quatre puissances seront en équilibre.*

3°. *Si les quatre puissances* P, Q, R, S *sont en équilibre, & que le nœud* A *de leurs cordons soit le centre de gravité de la pyramide* E B C D; *ces quatre puissances seront proportionnelles aux parties* A E, A B, A C, A D *de leurs directions, comprises dans cette pyramide.*

DÉMONSTRATION.

PARTIE I. Les trois puissances *Q, R, S* étant représentées par *A B, A C, A D*; si par le point *F* milieu de *B C* & par le point *D* l'on mène la droite *F D*, & qu'ayant fait $FG = \frac{1}{3} FD$ l'on tire par le point G une droite $AGH = 3\,AG$; cette droite *A G H* sera (*n°.* 250) l'expression de la force resultante des trois puissances *Q, R, S*, & le point *G* sera (*n°.* 35) le centre de gravité du triangle *B C D* qu'on peut regarder comme la base de la pyramide triangulaire *E B C D.*

Mais puisque les quatre puissances *P, Q, R, S* représentées par *A E, A B, A C, A D* sont en équilibre, l'expression *A E* de la puissance *P* est égale & directement opposée à la droite *A H* qui représente la résultante des trois autres. Ainsi *H A E* ou *G A E* est une ligne droite, & *A G* qui est le tiers de *A H* est aussi le tiers de $AE = AH$ ou le quart de *G E*; & par conséquent le point *A* est (*n°.* 48) le centre de gravité de la pyramide triangulaire *E B C D.*

Ç. Q. F. 1°. *D.*

PARTIE II. Puisque le nœud *A* des trois cor-

dons est (*hyp.*) le centre de gravité de la pyrâmide *E B C D*; si l'on prolonge la direction *A E* de la puissance *P* jusqu'à la base *B C D* de la pyramide, le point *G* où cette base sera rencontrée sera son centre de gravité. Ainsi la ligne *A E*, par laquelle la puissance *P* est représentée, sera égale à 3 *A G*.

Puisque *G* est le centre de gravité du triangle *B C D*, la droite *D G F* qu'on mènera du point *D* par ce point *G*, divisera son côté *B C* en deux parties égales, & l'on aura $FG = \frac{1}{3} FD$. Ainsi (*n°*. 250) la résultante des trois puissances *Q*, *R*, *S* sera dirigée suivant *A G*, & représentée par une droite *A G H* égale à 3 *A G*.

Donc la puissance *P* & la résultante des trois puissances *Q*, *R*, *S* sont deux forces égales & directement opposées; puisqu'elles sont toutes deux représentées par 3 *A G*, & qu'elles sont dirigées l'une suivant *A E*, l'autre suivant *A G H*. Ainsi les quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S* sont en équilibre. C. Q. F. 2°. D.

Partie III. Puisque (*hyp.*) le noeud *A* des quatre cordons est le centre de gravité de la pyramide *E B C D*; si de l'angle *D* l'on mène *D F* au milieu de *C B*, & qu'ayant fait $GF = \frac{1}{3} FD$, l'on tire *G A*, cette ligne *G A* sera en ligne droite avec *A E*, & l'on aura $AG = \frac{1}{3} AE$ ou $3\,AG = AE$.

Par le point *F* milieu de *B C* soit menée une droite *A F I* double de *A F*, & soient tirées les deux droites *I C*, *I B*; il est clair que le quadrilatère *A B I C* sera un parallélogramme; & si après avoir prolongé *A G* d'une quantité $GH = 2\,AG$, l'on mène les droites *H D*, *H I*, le quadrilatère *A D H I* sera aussi un parallélogramme, & l'on aura $AH = 3\,AG = AE$.

Car puisque $GF = \frac{1}{3} FD = \frac{1}{2} GD$, & que

(*conſtr.*) $AG = \frac{1}{2} GH$; les deux angles AGF, HGD oppoſés par le ſommet & par conſéquent égaux, ſeront compris entre des côtés proportionnels. Ainſi les deux triangles AGF, HGD ſeront ſemblables; & leurs angles correſpondans GAF, GHD ſeront égaux; d'où il ſuit que les deux droites AFI, DH ſeront parallèles.

Les triangles ſemblables AGF, HGD donneront $AF : HD :: GF : GD$ ou $:: 1 : 2$; ainſi l'on aura $HD = 2AF$: & puiſque (*conſtr.*) l'on a auſſi $AI = 2AF$, les deux parallèles DH, AI ſeront égales, & le quadrilatère $ADHI$ ſera par conſéquent un parallélogramme.

Comme les quatre puiſſances P, Q, R, S ſont ſuppoſées en équilibre; ſi l'on repréſente la puiſſance P par la partie AE de ſa direction, compriſe dans la pyramide $EBCD$; la réſultante des trois autres puiſſances Q, R, S ſera repréſentée par la droite AGH qui eſt égale & directement oppoſée à AE.

Or la réſultante AGH des trois puiſſances Q, R, S étant la diagonale du parallélogramme $ADHI$, peut être conſidérée comme la réſultante de deux forces repréſentées par AD, AI: & comme la force exprimée par AD a la même direction que la puiſſance S, elle ſera la force de cette puiſſance elle-même.

A l'égard de la force repréſentée par la diagonale AI du parallélogramme $ABIC$, il eſt clair (n°. 230) qu'elle ſe décompoſera en deux autres repréſentées par les parties AB, AC des directions des deux puiſſances Q, R, & que ces deux forces ſeront par conſéquent celles des deux puiſſances Q, R.

Il eſt donc démontré que les quatre puiſſances P, Q, R, S en équilibre & appliquées à quatre

cordons assemblés par un nœud *A* placé au centre de gravité de la pyramide *EBCD*, sont représentées par les parties de leurs directions, comprises dans cette pyramide. *C. Q. F.* 3°. *D.*

COROLLAIRE.

Fig. 17. 308. Donc on peut faire une infinité de pyramides triangulaires différentes les unes des autres, dont les distances du centre de gravité aux quatre angles *E*, *B*, *C*, *D* soient égales.

Car on vient de voir que quatre puissances *P*, *Q*, *R*, *S* en équilibre, & représentées par quatre droites *AE*, *AB*, *AC*, *AD*, peuvent toûjours être regardées comme les distances du centre de gravité *A* d'une pyramide à ses quatre angles. Mais on peut mettre quatre puissances en équilibre en variant d'une infinité de manières les angles que leurs directions font entre elles. Donc on peut varier aussi d'une infinité de façons les angles que font entr'elles les quatre distances du centre de gravité *A* d'une pyramide à ses quatre angles, sans rien changer à la longueur de ces distances & sans déranger le centre de gravité *A*; c'est-à-dire qu'on peut faire une infinité de pyramides différentes les unes des autres qui aient toutes le même centre de gravité *A*, & dont les distances du centre de gravité aux quatre angles *E*, *B*, *C*, *D* soient les mêmes quant à leurs grandeurs seulement.

DÉFINITIONS.

Fig. 18. 309. Lorsque plusieurs puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, &c. appliquées à autant de cordons attachés ensemble par un nœud *A*, & représentées par des par-

ties *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *&c.* de leurs directions, soûtiennent un poids *K* appliqué à un cordon issu du même noeud *A*; si l'on prolonge la direction verticale du cordon du poids au-delà du noeud *A*, & que des extrémités *B*, *C*, *D*, *E*, *&c.* des lignes qui représentent les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *&c.* l'on mène des perpendiculaires *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, *&c.* à la direction verticale du poids; les parties *Ab*, *Ac*, *Ad* de cette direction verticale, comprises entre le noeud *A* & les perpendiculaires *Bb*, *Cc*, *Dd* supérieures au noeud *A*, seront nommées les *Sublimités* des puissances *P*, *Q*, *R*, & ces puissances elles-mêmes seront appelées *Puissances sublimes*, parce qu'elles tendront à élever le poids *K*. Au contraire la partie *Ae* de la direction verticale du poids, comprise entre le noeud *A* & la perpendiculaire *Ee* inférieure à ce noeud, sera nommée la *Profondeur* de la puissance *S*, & cette puissance ellemême s'appellera *Puissance profonde*, parce qu'elle tend à abaisser le poids.

THÉOREME.

310. *Lorsque plusieurs puissances* P, Q, R, S, &c. *appliquées à autant de cordons attachés ensemble par un nœud commun* A, *soûtiennent un poids* K; *ce poids est à chacune des puissances qui tendent à l'élever ou à l'abaisser, comme la différence qu'il y a entre la somme des sublimités des puissances sublimes & la somme des profondeurs des puissances profondes, est à chacune des lignes* AB, AC, AD, AE, &c. *proportionnelles aux puissances* P, Q, R, S, &c. *c'est-à-dire que* Fig. 18.

$K:P:Q:R:S:\&c :: Ab+Ac+Ad-Ae\,\&c : AB:AC:AD:AE:\&c.$

DÉMONSTRATION.

Puisque les puissances P, Q, R, S, &c. soutiennent le poids K, & que tout le système doit par conséquent être en équilibre, le poids K est égal à la résultante de toutes les puissances P, Q, R, S, &c; ainsi cette résultante doit être dirigée suivant le prolongement AH du cordon AK au-delà du nœud A.

Mais après avoir représenté les puissances P, Q, R, S, &c. par les parties AB, AC, AD, AE, &c. de leurs directions, si l'on mène à la droite HAK des perpendiculaires Bb, Cc, Dd, Ee, &c. pour avoir les sublimités Ab, Ac, Ad des puissances P, Q, R, & la profondeur Ae de la puissance S, &c. la ligne qui exprimera la quantité de force de la résultante des puissances P, Q, R, S, &c. sera égale à $Ab + Ac + Ad - Ae$ &c. (n°. 258); ainsi la ligne par laquelle on représentera le poids K sera aussi égale à $Ab + Ac + Ad - Ae$ &c; & par conséquent on aura

$$K : P : Q : R : S : \&c :: Ab + Ac + Ad - Ae \ \&c : AB : AC : AD : AE : \&c.$$

C. Q. F. D.

N. B. *On n'a mis dans la figure qu'une puissance profonde; mais il est évident que le Théorème seroit encore vrai, & que sa démonstration seroit la même, s'il y avoit plusieurs puissances de cette espèce; c'est-à-dire qu'il faudroit soustraire toutes les profondeurs des puissances profondes, de la somme des sublimités des puissances sublimes, pour avoir l'expression de la pesanteur du corps* K, *ou de la résultante de toutes les puissances employées pour élever ou pour abaisser ce corps.*

COROLLAIRE.

311. Si la puissance *S* représentée par *AE* tiroit horizontalement, c'est-à-dire perpendiculairement à la direction verticale *AK* de la pesanteur du corps *K*; cette puissance n'auroit ni sublimité ni profondeur, & la ligne *Ae* qui représentoit sa profondeur dans la figure précédente seroit nulle. Alors le poids *K* seroit à chacune des puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, comme la somme $Ab + Ac + Ad$ des sublimités est à chacune des proportionnelles *AB*, *AC*, *AD*, *AE* des puissances *P*, *Q*, *R*, *S*. Fig. 19.

REMARQUE.

312. Il faut remarquer qu'on doit rapporter à la Machine funiculaire dont tous les cordons sont assemblés par un même nœud, toutes les machines funiculaires dans lesquelles plusieurs cordons *AB*, *AC*, *&c.* qui partent d'un même nœud *A*, sont assemblés par d'autres nœuds *B*, *C* avec d'autres cordons *BD*, *BR* & *CT*, *CV*, parmi lesquels il y en a qui, comme le cordon *BD*, s'unissent à d'autres cordons par de nouveaux nœuds. Fig. 20.

Car si l'on considère les cordons sans pesanteur, sauf à examiner dans la suite de ce Livre les changemens qu'il y aura à faire lorsque les cordons seront regardés comme pesans, les quantités de force & les directions des puissances *P*, *Q*, *R*, *T*, *V*, *K* seront les seules choses à considérer, soit pour la composition des forces, soit pour l'équilibre; & il ne faudra avoir aucun égard à la longueur des cordons qu'on pourra supposer aussi courts qu'on voudra. Cela posé on pourra rendre nulles les longueurs de quel-

ques-uns de ces cordons, par exemple, celles des cordons *A C*, *A B*, *B D* dont chacun joint deux nœuds de la Machine funiculaire, sans rien changer aux quantités de force & aux directions des puissances *P*, *Q*, *R*, *T*, *V*, *K*; ce qui réduira la machine funiculaire composée de plusieurs faisceaux de cordons assemblés par différens nœuds, à une machine funiculaire dont tous les cordons sortiront d'un même nœud *A*. Ainsi nous pourrions nous dispenser de parler des machines funiculaires composées de plusieurs faisceaux de cordons assemblés par différens nœuds, si nous n'avions pas quelques remarques à faire sur ces espèces de machines.

I.

Fig. 10. 313. Si chaque nœud d'une machine funiculaire en équilibre n'assemble que trois cordons, il suffira de connoître la quantité de force d'une seule puissance ou la tension d'un seul cordon, pour trouver celles de toutes les autres puissances, & les tensions particulières de tous les cordons.

Toute la Machine funiculaire étant en équilibre, chaque partie de son système, c'est-à-dire tous les cordons qui partent d'un même nœud, sont aussi en équilibre.

Or puisque (*n°.* 286) on trouve les rapports de trois puissances en équilibre, dont les directions sont données & partent d'un même nœud; si l'une de ces trois puissances est connue, on trouvera la quantité de force de chacune des deux autres. Cela posé, il ne sera pas difficile de démontrer que la connoissance des forces avec lesquelles tous les cordons de la Machine funiculaire sont tendus, dépend de la connoissance

connoissance d'une seule de ces forces, lorsque chaque noeud de la machine n'assemble que trois cordons.

Supposons que l'on connoît le poids *K* attaché au cordon *AK* : on trouvera (n° 286-296) les tensions des deux cordons *AB*, *AC*. La tension du cordon *AB* en équilibre avec les deux cordons *BD*, *BR*, fera trouver les tensions particulieres de ces deux derniers cordons ; & la tension du cordon *AC* en équilibre avec les deux cordons *CT*, *CV*, donnera aussi les tensions de ces deux derniers cordons. Enfin la tension du cordon *BD* en équilibre avec les deux cordons *DP*, *DQ*, fera trouver les tensions de ces cordons ; & ainsi des autres. Donc la connoissance du seul poids *K* soûtenu en équilibre par les tensions de tous les cordons de la machine, suffit pour déterminer les tensions de tous ces cordons.

II.

314. Si quelques noeuds tels que *A* & *B* de la machine funiculaire assemblent chacun plus de trois cordons, la connoissance d'une seule puissance ou de la tension d'un seul cordon, ne suffira pas pour faire trouver toutes les autres puissances ou les tensions de tous les autres cordons ; & il faudra connoître les tensions d'autant de cordons plus un, qu'il y en auroit à supprimer pour que chaque noeud n'en assemblât que trois. Mais il ne sera pas toûjours nécéssaire que les cordons dont on connoîtra les tensions, partent tous des noeuds qui en assembleront plus de trois. Par exemple, dans la Figure 21 où il y a deux noeuds *A*, *B* qui assemblent chacun quatre cordons, & dans laquelle il y auroit deux cordons à supprimer pour que chaque noeud n'en assemblât que trois, il Fig. 21.

suffira de connoître les tensions des trois cordons *AK*, *DP*, *CV* pour trouver celles de tous les autres.

Car la tension du cordon *DP* en équilibre avec les deux cordons *DB*, *DQ*, fera connoître les tensions de ces deux derniers ; & la tension du cordon *CV* en équilibre avec les deux cordons *CT*, *CA*, fera pareillement trouver les tensions de ces deux derniers.

La tension donnée du cordon *AK*, & celle du cordon *AC* qu'on vient de trouver, composeront une force résultante qui sera en équilibre avec les tensions des deux cordons *AB*, *AX*, & qui fera trouver les tensions particulières de ces deux cordons.

Enfin les tensions des deux cordons *AB*, *BD* qu'on a trouvées, composeront une résultante qui sera en équilibre avec les tensions des deux cordons *BR*, *BS*, & qui fera trouver les tensions de ces deux cordons.

Donc la connoissance des tensions des trois cordons *AK*, *DP*, *CV* suffit pour faire trouver celles de tous les autres cordons.

III.

Fig. 21. 315. Une machine funiculaire en équilibre étant composée de plusieurs faisceaux de cordons assemblés par différens noeuds ; si l'on prolonge la direction de quelque puissance, par exemple, celle du poids *K* au delà du noeud *A*, & qu'après lui avoir mené des parallèles *eDf*, *oBp*, *zC* par tous les autres noeuds *D*, *B*, *C*, l'on tire à toutes ces parallèles des perpendiculaires *Ww*, *Ee*, *Ff*, *Hh*, *Ii*, *Ll*, *Yy* par les extrémités des droites *AW*, *DE*, *DF*, *BH*, *BI*, *CL*, *CY* qui représentent les quantités de force & les directions

des puiſſances X, P, Q, R, S, T, V; on aura la puiſſance ou le poids K, à chacune des autres puiſſances, comme la différence qui ſe trouvera entre la ſomme des ſublimités & la ſomme des profondeurs de toutes ces autres puiſſances, eſt à chacune des droites par leſquelles ces puiſſances ſont repréſentées; c'eſt-à-dire que l'on trouvera

$$K : \left\{\begin{matrix} X \\ P \\ Q \\ R \\ S \\ T \\ V \end{matrix}\right\} :: De + Bh + Bi + Cl + Cy - Df - Aw : \left\{\begin{matrix} AW \\ DE \\ DF \\ BH \\ BI \\ CL \\ CY \end{matrix}\right.$$

Car ſi DG eſt la ligne qui repréſente la réſultante des deux puiſſances P, Q, & que l'on mène Gg perpendiculairement ſur eDf, on aura (*n*°. 256) $Dg = Df - De$ ou $-Dg = De - Df$.

Mais DG repréſentant la réſultante des deux puiſſances P, Q, repréſente auſſi la force avec laquelle le cordon BD eſt tiré de B vers D; ainſi en faiſant $Bb = DG$, & menant bp perpendiculairement à oBp, la droite Bb repréſentera la tenſion ou la force du cordon BD; & celle Bp qui ſera égale à Dg, parce que les deux triangles Bpb, DgG ſeront égaux, exprimera la profondeur de cette force.

Suppoſons maintenant que BO repréſente la réſultante des trois forces avec leſquelles les trois cordons BD, BR, BS ſont tirés, & ſoit menée par le point O un perpendiculaire Oo ſur oBp; on aura (*n*°. 256) $Bo = Bh + Bi - Bp$: & comme

$- Bp = - Dg = De - Df$, on trouvera $Bo = Bh + Bi + De - Df$.

Mais *B O* exprimant la résultante des forces avec lesquelles les trois cordons *B D*, *B R*, *B S* sont tirés, représente aussi la force qui tire le cordon *A B* de *A* vers *B*; ainsi en faisant $AM = BO$, & tirant *M m* perpendiculairement sur *n A K*, ce qui donnera un triangle *A m M* parfaitement égal au triangle *B o O*, les lignes *A M*, *A m* représenteront la force du cordon *A B* & sa sublimité: & comme $Am = Bo$, on aura $Am = Bh + Bi + De - Df$.

Imaginons que la ligne *C Z* directement opposée à *C A*, est la résultante des deux puissances *T*, *V*, & qu'on a tiré *Z z* perpendiculairement sur *z C*; on aura (n° 256) $Cz = Cl + Cy$: & comme la résultante des deux puissances *T*, *V* est égale à la force de tension du cordon *A C*, si l'on fait $AN = CZ$, & qu'on mène *N n* perpendiculairement à *n A K*, ce qui donnera le triangle *N n A* parfaitement égal au triangle *Z z C* & $An = Cz$, on aura $An = Cl + Cy$.

Enfin supposant que la résultante des forces avec lesquelles les trois cordons *A B*, *A C*, *A X* sont tirés, est représentée par une droite *A k* directemen topposée à *A K*, on aura (n°. 256) $Ak = Am + An - Aw$. Et comme on a trouvé $Am = Bh + Bi + De - Df$, & $An = Cl + Cy$, il est évident qu'on trouvera $Ak = Bh + Bi + De - Df + Cl + Cy - Aw$, ou $= De + Bh + Bi + Cl + Cy - Df - Aw$.

Mais puisque toute la machine funiculaire est en équilibre, & que sa partie composée des quatre cordons *A K*, *A B*, *A C*, *A X* est par conséquent aussi en équilibre; la résultante des forces des trois cordons

AB, *AC*. *AX* est égale à la force de la puissance ou du poids *K*. Ainsi la quantité de force de cette puissance ou de ce poids sera aussi exprimée par $De + Bh + Bi + Cl + Cy - Df - Aw$; & comme les puissances *X*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* sont représentées par les parties *AW*, *DE*, *DF*, *BH*, *BI*, *CL*, *CY*, de leurs directions, on aura.

$$K : \left\{ \begin{matrix} X \\ P \\ Q \\ R \\ S \\ T \\ V \end{matrix} \right\} :: De + Bh + Bi + Cl + Cy - Df - Aw : \left\{ \begin{matrix} AW \\ DE \\ DF \\ BH \\ BI \\ CL \\ CY \end{matrix} \right.$$

CHAPITRE II.

Des Polygones funiculaires.

THÉOREME.

316. S*oit une corde lâche* A B C D *sans pesanteur*, Fig. 22 *parfaitement flexible*, *& arrêtée par ses extrémités à* & 23. *deux points fixes* A, D; *& soient attachés à deux points quelconques* B, C *de cette corde*, *deux cordons* B P, C Q *tirés par deux puissances ou par deux poids* P, Q : *lorsque tout le système sera en équilibre*, *si sur les côtés des angles* A B C, B C D *de la corde lâche on fait deux parallélogrammes* B C F E, B C G H *qui ayent le cordon* B C *pour côté commun*, *& dont les diagonales soient les prolongemens* B F, C H *des deux cordons* B P, C Q; *enfin si l'on nomme* A, D, K *les*

résistances des crochets A, D *&* *la tension du cordon* BC, *ou les tensions des trois cordons* AB, DC, BC; *on aura* P : A : K : Q : D : : BF : BE : BC : CH : CG.

DÉMONSTRATION.

Le système entier étant supposé en équilibre, toutes ses parties seront aussi en équilibre.

Or 1°. les tensions ou forces des trois cordons *BP*, *BA*, *BC* assemblés par le noeud *B*, étant en équilibre, on aura (*n°.* 287) *P* : *A* : *K* : : *BF* : *BE* : *BC*; c'est-à-dire qu'en représentant la tension *K* du cordon *BC* par sa longueur, la puissance *P* & la tension du cordon *AB* ou la charge du crochet *A*, seront représentées par *BF*, *BE*.

2°. Les forces avec lesquelles les trois cordons *CB*, *CQ*, *CD* assemblés par le noeud *C* sont tendus, étant aussi en équilibre, on aura *K* : *Q* : *D* : : *BC* : *CH* : *CG*; c'est-à-dire que si l'on représente encore la tension du cordon *BC* par sa longueur, la puissance *Q* & la tension du cordon *CD* ou la charge du crochet *D*, seront représentées par *CH*, *CG*.

Ainsi, en représentant la tension du cordon *BC* par sa longueur, les puissances *P*, *Q* & les charges ou résistances des crochets *A*, *D* seront représentées par *BF*, *CH*, *BE*, *CG*; & par conséquent on aura *P* : *A* : *K* : *Q* : *D* : : *BF* : *BE* : *BC* : *CH* : *CG*.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 13. 317. Si les puissances *P*, *Q* sont deux poids ou deux forces dont les directions soient parallèles, on n'aura pas besoin des parallélogrammes *BCEF*, *BCGH*

pour trouver les rapports des forces des cinq cordons du polygone funiculaire proposé : il suffira de prolonger les directions des cordons *AB*, *DC* qui partent des crochets, jusqu'à ce qu'elles rencontrent en *N*, *M* les directions *CQ*, *BP* des puissances parallèles, & l'on aura

$P : A : K : Q : D :: CN : BN : BC : BM : CM.$

Car à cause des directions parallèles des poids ou puissances *P*, *Q*, les quadrilatères *BFCN*, *BHCM* auront les côtés opposés parallèles, & par conséquent égaux ; ainsi l'on aura

$CN = BF, BN = CF = BE, BM = CH, CM = BH = CG.$

Donc puisque (*n°*. 316.) on a trouvé en général $P : A : K : Q : D :: BF : BE : BC : CH : CG$, on aura aussi

$P : A : K : Q : D :: CN : BN : BC : BM : CM.$

On auroit pû démontrer ce Corollaire sans le conclurre du Théorème. Car les côtés du triangle BCN *étant parallèles aux directions des trois cordons* BP, BA, BC *dont les trois forces* P, A, K *sont en équilibre, on aura* (n°. 288.) P : A : K :: CN : BN : BC : *& les côtés du triangle* BCM *étant parallèles aux trois cordons* CB, CQ, CD, *dont les forces sont aussi en équilibre, on aura* K : Q : D :: BC : BM : CM. *Ainsi en représentant la tension du cordon* BC *par sa longueur, les deux puissances* P, Q *de directions parallèles, & les tensions des deux cordons* AB, CD *seront représentées par* CN, BM, BN, CM ; *c'est-à-dire que l'on aura*

P : A : K : Q : D :: CN : BN : BC : BM : CM.

Corollaire II.

Fig. 23. 318. Si l'on ne demande que le rapport des deux poids ou puissances parallèles P, Q, on trouvera $P : Q :: CN : BM$; c'est-à-dire que ces deux puissances sont réciproquement proportionnelles aux parties BM, CN de leurs cordons, comprises entre les nœuds B, C & les prolongemens des cordons AB, DC qui sont arrêtés aux deux crochets.

Ce Corollaire est le fondement d'une balance funiculaire propre à peser toutes sortes de corps, tels que Q, *par le moyen d'un poids quelconque* P *dont la pesanteur est connue.*

Fig. 24. 319. *Pour construire cette balance on prend une corde fine ou très-peu pesante en comparaison des deux poids* P, Q; *& ayant arrêté les extrémités de cette corde à deux points fixes* A, D *placés à volonté, on lui attache en deux points quelconques* B, C, *deux cordons* BP, CQ *auxquels on applique le poids donné* P *& le corps* Q *dont on veut connoître la pesanteur.*

La machine étant ainsi disposée & tout le système étant en équilibre, on attache aux deux crochets A, D *deux fils* AS, DR, *& les ayant étendus le long des cordons* AB, DC, *l'on marque les points* N, M *où ils rencontrent les cordons* CQ, BP *des deux poids; & pour mieux reconnoître ces deux points, on y met deux épingles ou deux petites perles percées qu'on a eu soin d'enfiler dans les cordons* CQ, BP. *Enfin ayant mesuré les deux parties* CN, BM *comprises entre les nœuds* C, B *& les deux points* N, M, *on fait cette proportion.*

Comme CN
Est à BM;
Ainsi le poids P dont la pesanteur est connue,
Est au poids inconnu Q qu'on trouvera égal à $\frac{P \times BM}{CN}$.

Supposons qu'on ait trouvé B M *de* 8$^{pouc.}$ *&* C N *de* 12$^{pouc.}$ *& que le poids connu* P *soit de* 1$^{liv.}$ *ou de* 16$^{onc.}$, *on aura cette proportion* : 12$^{pouc.}$: 8$^{pouc.}$: : 16$^{onc.}$: Q. *Ainsi l'on trouvera* $Q = \frac{128 \text{ onces}}{12} = 10^{\text{on.}} \frac{2}{3}$.

On doit observer que cette balance sera d'autant plus juste, que la corde A B C D *sera moins pesante. A l'égard des deux cordons* B P, C Q, *ils ne troubleront point la justesse de cette balance, pourvû que leurs poids soient connus, & qu'on les comprenne dans ceux des deux corps* P, Q *que l'on compare, sauf à retrancher de la valeur qu'on a trouvée pour le poids* Q, *la pesanteur du cordon* C Q *pour avoir le poids net du corps* Q.

THÉOREME.

320. *Soit une corde lâche* A B C D E *attachée par ses extrémités à deux crochets* A, E, *& soient tant de puissances qu'on voudra* P, Q, R, &c. *appliquées à cette corde par le moyen d'autant de cordons* B P, C Q, D R, &c. *dirigés à volonté, pourvû néanmoins que tout le systême funiculaire soit dans un même plan : lorsque tout le systême sera en équilibre, si d'un point quelconque* S *pris dans le plan de la corde lâche* A B C D E, *l'on abaisse des perpendiculaires* S F, S G, S H, S I, &c. *sur les parties de cette corde, & que l'on tire sur les directions des puissances* P, Q, R, &c. *des perpendiculaires* K L, L M, M N, &c. *qui fassent entr'elles des angles dont les sommets* L, M, &c. Fig. 25 & 26

soient dans les droites S G, S H, &c ; *enfin si l'on nomme* F, G, H, I, &c. *les tensions des cordons* AB, BC, CD, DE, &c. *on aura*

P : Q : R : F : G : H : I : : KL : LM : MN : SK : SL : SM : SN.

DÉMONSTRATION.

Puisque tout le systême funiculaire est en équilibre, chacune de ses parties, composée de trois cordons assemblés par un nœud, sera aussi en équilibre. Cela posé ;

1°. Les côtés du triangle *KSL* étant perpendiculaires sur les trois cordons *BP*, *BA*, *BC*, dont les tensions *P*, *F*, G sont en équilibre, on aura (*n°*. 289) *P* : *F* : *G* : : *KL* : *SK* : *SL*.

2°. Les côtés du triangle *LSM* étant perpendiculaires sur les trois cordons *CB*, *CQ*, *CD* dont les tensions, *G*, *Q*, *H* sont en équilibre, on aura (*n°*. 289) *G* : *Q* : *H* : : *SL* : *LM* : *SM*.

3°. Les côtés du triangle *MSN* étant perpendiculaires sur les trois cordons *DC*, *DR*, *DE* dont les tensions *H*, *R*, *I* sont en équilibre, on aura *H* : *R* : *I* : : *SM* : *MN* : *SN* ; & ainsi des autres.

Donc puisque la tension du cordon *BC* est représentée par la même ligne *SL* dans les deux premieres suites de proportionnelles, & que la tension du cordon *CD* est représentée par la même droite *SM* dans la 2[de] & 3[me] suite ; les tensions des autres cordons *BP*, *CQ*, *DR*, *AB*, *DE*, &c. seront représentées par *KL*, *LM*, *MN*, *SK*, *SN*, &c. & par conséquent on aura

P : *Q* : *R* : *F* : *G* : *H* : *I* : &c : : *KL* : *LM* : *MN* : *SK* : *SL* : *SM* : *SN* : &c.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

321. Si les directions de tous les cordons du polygone funiculaire sont données, on trouvera toûjours en quels rapports sont les tensions de ces cordons; en sorte que si la tension d'un seul de ces cordons est connue, on déterminera avec combien de force chacun des autres cordons est tendu. Fig. 25 & 26.

Car on n'a besoin de connoître que les directions des cordons *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *BP*, *CQ*, *DR* du systême funiculaire, pour leur mener les perpendiculaires *SK*, *SL*, *SM*, *SN*, *KL*, *LM*, *MN* qui représentent leurs tensions; & comme on pourra mesurer toutes ces perpendiculaires après les avoir tirées, on connoîtra combien chacune contient de parties de la même échelle; ainsi leurs rapports, qui sont aussi ceux des tensions des cordons *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *BP*, *CQ*, *DR*, seront connus.

COROLLAIRE II.

322. Si tous les angles *ABC*, *BCD*, *CDE*, &c. de la corde lâche *ABCDE* sont divisés en deux parties égales par les directions des puissances *P*, *Q*, *R*, &c. toutes les parties *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c. de la corde lâche seront tendues avec des forces égales. Fig. 25.

Car les côtés *SK*, *KL* de l'angle *SKL* étant perpendiculaires sur les côtés *AB*, *BX* de l'angle *ABX*, ces deux angles seront égaux; & les côtés de l'angle *SLK* étant aussi perpendiculaires sur les côtés de l'angle *CBX*, ces deux angles seront aussi égaux. Mais puisque (*hyp.*) la direction *BP* de la puissance *P* divise l'angle *ABC* en deux parties

égales, les deux angles ABX, CBX sont égaux; ainsi les deux angles, SKL, SLK sont aussi égaux; & par conséquent les côtés SK, SL, opposés à ces deux angles, sont égaux; d'où il suit que les tensions des cordons AB, BC, représentées par SK, SL, sont égales.

On démontrera de la même manière que les deux angles SLM, SML du triangle LSM, sont de même grandeur que les deux moitiés BCY, DCY de l'angle BCD; que les deux côtés SL, SM sont par conséquent égaux; & que les tensions des deux parties BC, CD de la corde lâche, représentées par ces côtés égaux SL, SM, sont égales; & ainsi des autres.

Corollaire III.

Fig. 26. 323. Lorsque les puissances P, Q, R sont des poids, les droites KL, LM, MN menées perpendiculairement sur leurs directions, ne composent ensemble qu'une seule ligne droite horizontale KN: & comme on a démontré (*n*°. 320.) qu'on aura dans tous les cas

$$P : Q : R : F : G : H : I :: KL : LM : MN : SK : SL : SM : SN,$$

il est clair que si d'un point quelconque S pris dans le plan de la corde lâche $ABCDE$ tirée par des poids P, Q, R, on mène des perpendiculaires SF, SG, SH, SI sur les parties AB, BC, CD, DE de cette corde, & que l'on coupe toutes ces perpendiculaires par une même droite horizontale KN, les poids P, Q, R seront représentés par les parties KL, LM, MN de cette ligne horizontale, comprises entre les perpendiculaires SF, SG, SH, SI; & les tensions des parties AB, BC, CD, DE de la corde

lâche, ſeront exprimées par les parties *SK,SL,SM,SN* de leurs perpendiculaires, compriſes entre le point *S* & la droite horizontale *KN*.

COROLLAIRE IV.

324. Puiſque les quantités de force des puiſſances ou des poids *P*, *Q*, *R* ſont repréſentées par *KL*, *LM*, *MN* & que les droites *SK*, *SL*, *SM*, *SN* expriment les forces avec leſquelles les parties *AB*, *BC*, *CD*, *DE* de la corde lâche *ABCDE* ſont tendues; il eſt évident qu'on aura Fig. 25 & 26.

$$P+Q+R:F:G:H:I::KLMN:SK:SL:SM:SN,$$

$$\& P+Q:R:F:G:H:I::KLM:MN:SK:SL:SM:SN;$$

& ainſi des autres.

COROLLAIRE V.

325. Lorſque la corde lâche, qu'on ſuppoſe parfaitement flexible, ſera peſante, & que ſa peſanteur lui fera prendre une courbure; ſi par ſes extrémités *A*, *E* l'on mène deux tangentes *AT*, *ET*, & que par un point quelconque *S* pris dans le plan de la courbe, on tire à ces tangentes des perpendiculaires *SF*, *SI* qui rencontrent en *K*, *N* une droite horizontale *KN*, on aura (en nommant *P*, *F*, *I* le poids de la corde *ABCDE*, & les charges des crochets *A*, *E* qui la ſoûtiennent) $P:F:I::KN:SK:SN$. Car la courbe *ABCDE* peut être regardée comme une portion de polygone d'une infinité de côtés, chargée à ſes angles de petits poids dont la ſomme ſera repréſentée par la ſomme des parties de la droite horizontale *KN*, pendant que les parties *SK*, *SN* des perpendiculaires menées ſur les tangentes *AT*, *ET* Fig. 27.

ou sur les prolongemens des côtés extrêmes de la courbe, représenteront les tensions de ces côtés extrêmes ou les charges des crochets *A*, *E*.

COROLLAIRE VI.

Fig. 27. 326. Si par un point quelconque *B* de la courbe funiculaire pesante on tire une tangente *BG*, & que par le point *S* on mène à cette tangente une perpendiculaire *SG* qui rencontre la ligne horizontale *KN* en quelque point *L*; le poids de la courbe entière étant représenté par la droite horizontale *KN* les poids de ses parties *AB*, *BE*, les charges des crochets *A*, *E*, & la force avec laquelle la corde lâche sera tendue au point *B*, seront représentés par les droites *KL*, *LN*, *SK*, *SN*, *SL*. Ce Corollaire est une suite naturelle des deux précédens.

THÉOREME.

Fig. 25 & 26. 327. *Une corde lâche* ABCDE *considérée sans pesanteur & attachée par ses extrémités à deux crochets* A, E, *étant tirée par tant de puissances* P, Q, R *qu'on voudra, dirigées dans un même plan; si l'on nomme* F, G, H, I *les forces avec lesquelles les parties* AB, BC, CD, DE *de cette corde sont tendues, on aura*

F : G :: S.CBP : S.ABP.

F : H :: S.CBP × S.DCQ : S.ABP × S.BCQ.

F : I :: S.CBP × S.DCQ × S.EDR : S.ABP × S.BCQ × S.CDR.

DÉMONSTRATION.

Tout le système étant en équilibre, chacune de ses parties, composée de trois cordons assemblés par un même noeud, sera aussi en équilibre.

Or les trois cordons BA, BC, BP dont les forces sont en équilibre, donneront (n°. 296) $F : G :: S.\,CBP : S.\,ABP$.

Les trois cordons en équilibre CB, CD, CQ donneront } .... $G : H :: S.\,DCQ : S.\,BCQ$.

Les trois cordons en équilibre DC, DE, DR donneront } .... $H : I :: S.\,EDR : S.\,CDR$.

Donc si l'on prend la premiere proportion; que l'on multiplie ensuite par ordre la premiere & la seconde; & qu'on multiplie aussi par ordre les trois proportions,

on aura

$$\begin{cases} F : G :: S.\,CBP : S.\,ABP \\ F : H :: S.\,CBP \times S.\,DCQ : S.\,ABP \times S.\,BCQ \\ F : I :: S.\,CBP \times S.\,DCQ \times S.\,EDR : S.\,ABP \times S.\,BCQ \times S.\,CDR. \end{cases}$$

C. Q. F. D.

Corollaire I.

328. Si les puissances P, Q, R sont des poids, leurs directions BP, CQ, DR seront parallèles. Ainsi les angles CBP, DCQ auront les mêmes sinus que les angles BCQ, CDR, qui sont égaux aux supplémens des premiers; c'est-à-dire qu'on aura $S.\,CBP = S.\,BCQ$ & $S.\,DCQ = S.\,CDR$; & par conséquent les proportions qu'on a démontrées dans le Théorème, se changeront en celles-ci: Fig. 26

$$F : G :: S.\,CBP : S.\,ABP$$

$$F : H :: S.\,DCQ : S.\,ABP$$

$$F : I :: S.\,EDR : S.\,ABP$$

C'est-à-dire que les tensions de deux cordons quelconques sont réciproquement proportionnelles

aux sinus des angles que ces cordons font avec des lignes verticales.

COROLLAIRE. II.

Fig. 27. 329. Donc, 1°. Si par les extrémités *A*, *E* d'une courbe funiculaire pesante, l'on mène à cette courbe deux tangentes *AT*, *ET*, & qu'on abaisse les lignes verticales *AV*, *EX*, les charges des deux crochets *A*, *E* seront réciproquement proportionnelles aux sinus des angles *TAV*, *TEX* que les tangentes *AT*, *ET* font avec les verticales *AV*, *EX*. Car les tangentes *AT*, *ET* sont les prolongemens des côtés extrèmes de la corde lâche *ABCDE*.

2°. Si par un point quelconque *B* de la courbe funiculaire pesante, l'on mène une tangente *BG* & une verticale *BZ*, la tension de la corde à ce point *B* & la charge du crochet $\left\{ \begin{matrix} A \\ E \end{matrix} \right\}$ seront réciproquement proportionnelles aux sinus des angles *GBZ*, $\left\{ \begin{matrix} TAV \\ TEX \end{matrix} \right\}$; c'est-à-dire que (en nommant *B*, *A*, *E* la tension de la corde au point *B*, & les charges des deux crochets *AE*) l'on aura

B : *A* :: *S.TAV* : *S.GB*, & *ZB* : *E* :: *S.TEX* : *S.GBZ*.

Car les parties *AB*, *BE* de la corde lâche se retiennent mutuellement au point *B*, comme s'il y avoit à ce point un crochet auquel elles fussent arrêtées; en sorte qu'on peut regarder les deux parties *AB*, *BE* de la courbe funiculaire, comme deux courbes funiculaires particulières arrêtées par leurs extrémités, l'une à deux crochets *A*, *B*, l'autre à deux crochets *B*, *E*.

THÉOREME

THÉOREME.

330. *Soit, comme dans le Théorème précédent, une corde lâche* ABCDE *attachée par ses extrémités à deux crochets* A, E, *& soient tant de puissances* P, Q, R *qu'on voudra, appliquées à des cordons* BP, CQ, DR *attachés à la corde lâche, de manière que tout le système soit dans un même plan. Si après avoir prolongé le premier côté* AB *de la corde lâche, on prolonge aussi tous les autres, excepté le second, jusqu'à ce qu'ils rencontrent le prolongement du premier en des points* S, T: *& si après avoir prolongé indéfiniment les directions des puissances* P, Q, R, *on mène par le point* S, *& par le point* M *où se rencontrent les directions des deux premières puissances* P, Q, *une droite* SMN *qui rencontre la direction de la puissance* R *en quelque point* N, *& qu'on tire la droite* TN *qui rencontrera encore la direction d'une autre puissance ou qui lui sera parallèle, s'il y en a un plus grand nombre: la droite* MS *sera la direction moyenne ou résultante des deux puissances* P, Q *qui agissent contre la partie* ABCD *de la corde lâche; & la droite* NT *sera la direction résultante des trois puissances* P, Q, R *qui agissent contre la corde* ABCDE*; & ainsi des autres.* Fig. 28.

DÉMONSTRATION.

Puisque tout le système est en équilibre, toutes ses parties sont aussi en équilibre : d'oú il suit que

1°. Les tensions des deux cordons *AB*, *CD* de la corde lâche sont en équilibre avec les deux premières puissances *P*, Q; ainsi la résultante des tensions des deux cordons *AB*, *CD* doit être égale & directement opposée à la résultante des deux premières

puiſſances *P*, Q. Les directions de ces deux réſultantes doivent donc être dans une même ligne droite & paſſer par les mêmes points.

Mais la direction de la réſultante des tenſions des deux cordons *AB*, *CD* paſſe par le point *S* où concourent les directions de ces deux cordons ; & la direction de la réſultante des deux puiſſances *P*, Q paſſe par le point *M* où ſe rencontrent leurs directions particulières.

Donc la réſultante des tenſions des deux cordons *AB*, *CD*, & celle des deux puiſſances *P*, Q, paſſent toutes deux par les mêmes points *S*, *M*, & ſont par conſéquent dirigées, l'une ſuivant *SMN*, & l'autre ſuivant *MSO*. C. Q. F. 1°. D.

On ne changera donc rien aux charges des crochets *A*, *E* ni à la force réſultante des puiſſances *P*, Q, *R*, en mettant à la place des deux puiſſances *P*, Q une ſeule puiſſance *O* égale à la réſultante de ces deux puiſſances, & dirigée ſuivant *MSO*, ou appliquée à un cordon *SO* qu'on imaginera attaché en *S* à une nouvelle corde lâche *ASDE*.

2°. La réſultante des tenſions des deux cordons *AS*, *DE* paſſera par le point *T* où concourent les prolongemens de ces cordons ; & la réſultante des deux puiſſances *O*, *R* paſſera par le point *N* où concourent leurs directions.

Mais puiſque tout le ſyſtème eſt en équilibre, ces deux réſultantes ſeront égales & directement oppoſées ; ainſi leurs directions doivent être dans une même ligne droite & paſſer par les mêmes points.

Donc la réſultante des tenſions de toutes les parties de la corde lâche, & la réſultante des deux puiſſances *O*, *R*, qui eſt la même que celle des trois

puissances P, Q, R, passeront toutes deux par les mêmes points T, N, & seront par conséquent dirigées l'une suivant TN, l'autre suivant NT. C. Q. F. 2°. D.

Corollaire I.

331. Il pourroit arriver que la direction de la puissance R & celle de la puissance O composée des deux puissances P, Q fussent parallèles. Dans ce cas on regarderoit ces deux directions comme concourantes à une distance infinie, & leur résultante qui concourroit avec elles à la même distance, leur seroit parallèle. Ainsi la droite TN qu'on meneroit par le point T parallèlement à la direction de la puissance R, seroit la direction de la résultante des deux puissances O, R ou des trois puissances P, Q, R.

Corollaire II.

332. Donc il suffit de connoître les directions de tous les cordons du systême funiculaire, pour avoir la direction NT de la résultante des puissances P, Q, R, ou la direction TN de la force résultante des tensions de tous les cordons du polygone funiculaire : car on n'a fait usage que des directions des cordons du systême pour trouver les points S, M, N, T. Fig. 17.

Il est aisé de prouver par tout ce qui a été dit précédemment, qu'une seule puissance ou la tension d'un seul cordon étant donnée, on trouvera la quantité de force résultante des puissances P, Q, R.

Corollaire III.

333. Si les directions & les tensions des cordons extrêmes AB, DE du polygone funiculaire sont Fig. 18.

données, on trouvera sans beaucoup de peine la direction *NT* & la quantité de force de la résultante des puissances *P*, *Q*, *R* qui tirent sur le polygone funiculaire. Car on a vû que cette résultante doit passer par le point *T*, où concourront les côtés extrêmes *AB*, *DE* du polygone, & qu'elle est égale à la résultante des forces avec lesquelles les cordons *AB*, *DE* ou *AT*, *ET* sont tendus. Ainsi prenant sur *TA* & *TE* les parties *TF*, *TG* proportionnelles aux tensions des côtés extrêmes *AB*, *DE*, & faisant le parallélogramme *TFHG*, sa diagonale *TH* représentera la direction & la quantité de force de la résultante des puissances *P*, *Q*, *R*; en sorte que, nommant *A*, *E* les efforts des crochets ou les tensions des cordons extrêmes, & *T* la force résultante des puissances *P*, *Q*, *R*, on aura $A : E : T :: TF : TG : TH$.

Corollaire IV.

Fig. 28. 334. Mais $TF : TG : TH :: TF : FH : TH$

ou $:: S.\,FHT : S.\,FTH : S.\,HFT$

ou $:: S.\,ETN : S.\,ATN : S.\,ATE$;

parce que les deux angles *HFT*, *ATE* qui valent ensemble deux droits, ont le même sinus.

Donc $A : E : T :: S.\,ETN : S.\,ATN : S.\,ATE$. C'est-à-dire qu'après avoir prolongé les côtés extrêmes *AB*, *ED* de la corde lâche *ABCDE*, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en quelque point *T*; si l'on détermine la direction *NT* de la résultante des puissances *P*, *Q*, *R*, les charges des deux crochets *A*, *E*, & leur résultante qui sera nécessairement égale à celles des trois puissances *P*, *Q*, *R*, seront trois forces dont chacune pourra être représentée par le sinus

de l'angle que les directions des deux autres feront entr'elles.

COROLLAIRE V.

335. Si les puissances P, Q, R sont des poids dont les directions sont toûjours parallèles, la verticale TN qu'on mènera par le point T où concourront les côtés extrêmes de la corde lâche $ABCDE$, sera la direction de la force résultante de tous les poids P, Q, R, & passera par conséquent par leur centre de gravité commun. Car nous avons vû que cette résultante doit passer par le point T; & puisqu'elle est égale à la somme des poids P, Q, R, dont les directions verticales sont parallèles, elle doit être aussi verticale. Fig. 29.

Enfin si l'on nomme A, E les charges des crochets de même nom, on aura

$$P+Q+R.A.E :: S.ATE : S.ETN : S.ATN.$$

COROLLAIRE VI.

336. Donc si par les extrémités A, E d'une courbe funiculaire pesante on mène deux tangentes AT, ET qui se rencontrent en quelque point T avec une ligne verticale TN; 1°. cette verticale passera par le centre de gravité de la corde ABE; 2°. le poids de cette corde qu'on nommera T, & les charges A, E des deux crochets seront représentés par les sinus des angles ATE, ETN, ATN. Car la corde pesante ABE peut être considérée comme une corde lâche chargée à tous ses angles d'une infinité de petits poids, & se trouve par conséquent dans le cas du Corollaire précédent. Fig. 30.

Corollaire VII.

Fig. 30. 337. Si par un point quelconque *B* de la courbe funiculaire pesante *ABE*, l'on mène une tangente *VBX* qui rencontre en *V*, *X* les deux tangentes tirées par les extrémités de cette courbe, & que par les points *V*, *X* on mène encore deux verticales *VL*, *XM*; ces deux verticales passeront par les centres de gravité particuliers des deux portions *AB*, *BE* de la courbe *ABE*.

Car les deux parties *AB*, *BE* peuvent être considérées comme des cordes entières attachées par leurs extrémités, l'une à deux crochets *A*, *B*, l'autre à deux crochets *B*, *E*. Ainsi ces deux portions *AB*, *BE* de la courbe funiculaire sont dans le cas de la courbe entière dont il est parlé dans le Corollaire précédent.

Théoreme.

338. *Un polygone régulier quelconque* ABCDEF
Fig. 31. *étant tiré par des puissances* P, Q, R, S, T, V *appliquées à tous ses angles & dirigées dans le plan de ce polygone ; si les prolongemens de toutes les directions de ces puissances passent par le centre* G *du polygone ;*

1°. *Tous les côtés du polygone* ABCDEF *seront tendus également.*

2°. *Toutes les puissances* P, Q, R, S, T, V *seront égales.*

3°. *La somme* P + Q + R + S + T + V *de toutes les puissances appliquées à ce polygone, sera à la tension de ce même polygone ou à celle de l'un quelconque de ses côtés, comme le contour de ce polygone est à son rayon.*

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un cercle au polygone proposé *ABCDEF*; & ayant pris les milieux *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N* de tous les arcs soûtenus par les côtés de ce polygone, soient tirées les cordes *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, *MN*, *NH*: on aura un nouveau polygone *HIKLMN* dont les côtés seront perpendiculaires aux directions des puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*; & si l'on tire des rayons à tous les angles de ce nouveau polygone, on le divisera en triangles parfaitement égaux dont chacun aura les côtés perpendiculaires sur trois cordons assemblés par un même noeud, & par conséquent proportionnels aux tensions de ces trois cordons; d'où il suit que

1°. Les tensions de tous les côtés *AB*, *BC*, *CD*, &c. du polygone funiculaire, seront représentées par les rayons égaux *GI*, *GK*, *GL*, &c. & seront par conséquent égales. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V* seront représentées par les côtés égaux *HI*, *IK*, *KL*, *LM*, *MN*, *NH* du polygone régulier *HIKLMN*, & seront par conséquent égales. *C. Q. F.* 2°. *D.*

3°. Et par conséquent, si l'on nomme *H* la tension d'un côté quelconque du polygone, c'est-à-dire celle de ce polygone lui-même, on aura $P : Q : R : S : T : V : H :: HI : IK : KL : LM : MN : NH : GH$; Ainsi (*Géom.* n°. 218) on aura cette proportion $P+Q+R+S+T+V : H :: HI+IK+KL+LM+MN+NH : GH$; c'est-à-dire que la somme de toutes les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, *V*, est à la tension du polygone *ABCDEF*, comme le contour du polygone

HIKLMN ou *ABCDEF* est au rayon *GH* ou *GA* de ce polygone. C. Q. F. 3°. D.

Corollaire I.

339. Donc si un cerceau est poussé en tous ses points par une infinité de puissances qui lui fassent prendre la figure circulaire, & que les directions de toutes ces puissances passent par le centre du cerceau; la somme de toutes les puissances qui pousseront le cerceau sera à sa tension, comme la circonférence de ce cerceau est à son rayon, c'est-à-dire comme 44 est à 7, à peu de chose près.

Car un cerceau, auquel une infinité de puissances font prendre la figure circulaire en poussant du centre à la circonférence, peut être regardé comme un polygone d'une infinité de côtés tiré à tous ses angles par des puissances dont les directions passent par le centre. Ainsi ce cerceau est dans le cas du polygone régulier qui fait l'objet du Théorème.

Corollaire II.

Fig. 32 & 33. 340. Si deux lignes circulaires *ABCDA*, *MNOPM* de différens rayons *AG*, *MR*, sont poussées dans tous leurs points par une infinité de puissances centrales proportionnelles à deux lignes *AE*, *MQ*, c'est-à-dire si chaque point de la ligne circulaire *ABCDA* est poussé du centre à la circonférence par une force représentée par *AE*, & que chaque point de la ligne circulaire *MNOPM* soit poussé par une puissance représentée par *MQ*; il est clair que les sommes des forces appliquées à ces deux lignes circulaires, seront représentées par les deux produits *ABCDA* × *AE*, *MNOPM* × *MQ*. Ainsi, en

nommant A, M les tensions des deux lignes circulaires $ABCDA$, $MNOPM$, on aura (n°. 339) $ABCDA \times AE : A :: ABCDA : AG$, ou $:: MNOPM : MR$. Mais on aura aussi $MNOPM \times MQ : M :: MNOPM : MR$. Donc on aura $ABCDA \times AE : A :: MNOPM \times MQ : M$; & par conséquent $A : M :: ABCDA \times AE : MNOPM \times MQ$; c'est-à-dire que les tensions des deux lignes circulaires $ABCDA$, $MNOPM$ sont proportionnelles aux surfaces convexes de deux cylindres qui ont mêmes rayons que ces deux lignes circulaires, & dont les hauteurs sont égales aux deux proportionnelles BE, MQ de leurs forces centrales.

Comme les deux lignes circulaires $ABCDA$, $MNOPM$ sont proportionnelles à leurs rayons AG, MR ou à leurs diamètres AC, MO, c'est-à-dire que

$$ABCDA : MNOPM :: AG : MR \text{ ou } :: AC : MO,$$

& que $AE : MQ :: AE : MQ :: AE : MQ$;

on aura

$$ABCDA \times AE : MNOPM \times MQ :: AG \times AE : MR \times MQ \text{ ou } :: AC \times AE : MO \times MQ$$

& par conséquent $A : M :: AG \times AE : MR \times MQ$ ou $:: AC \times AE : MO \times MQ$; c'est-à-dire que les tensions des deux lignes circulaires sont en même raison que les produits faits de leurs rayons ou de leurs diamètres, multipliés par les proportionnelles des forces centrales appliquées à tous leurs points.

COROLLAIRE III.

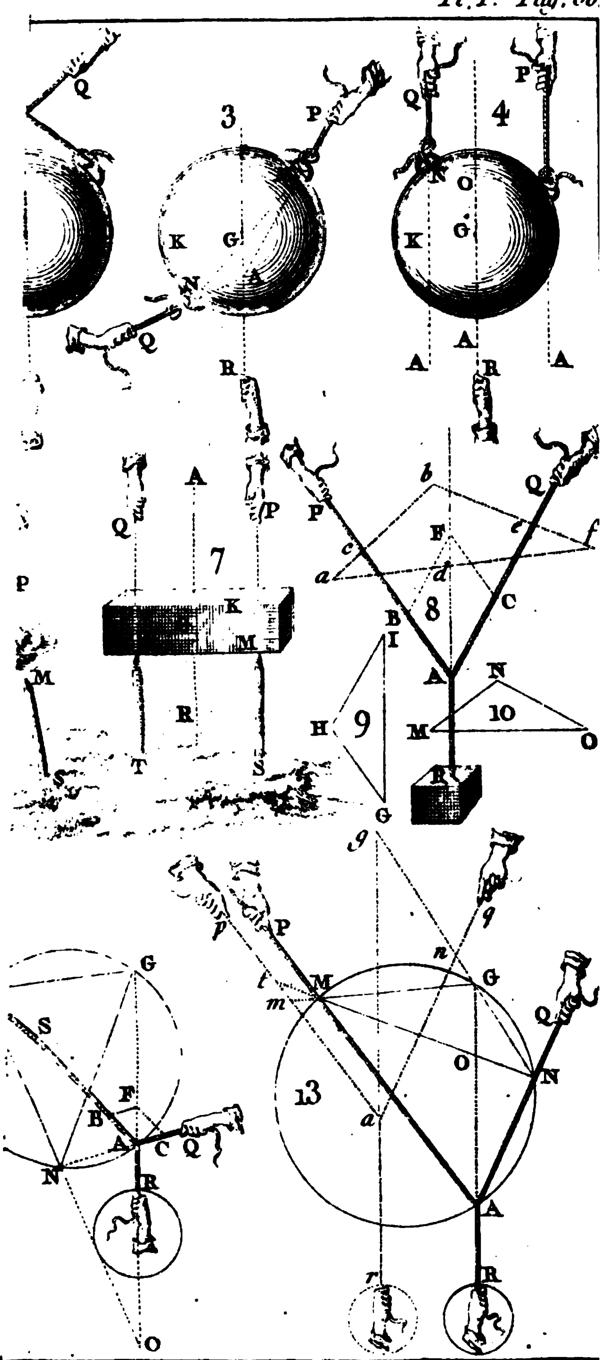
341. Si les droites AE, MQ proportionnelles aux forces avec lesquelles les lignes circulaires $ABCDA$, $MNOPM$ sont poussées du centre à la Fig. 32 & 34.

circonférence, sont égales ; les deux derniers termes de la proportion

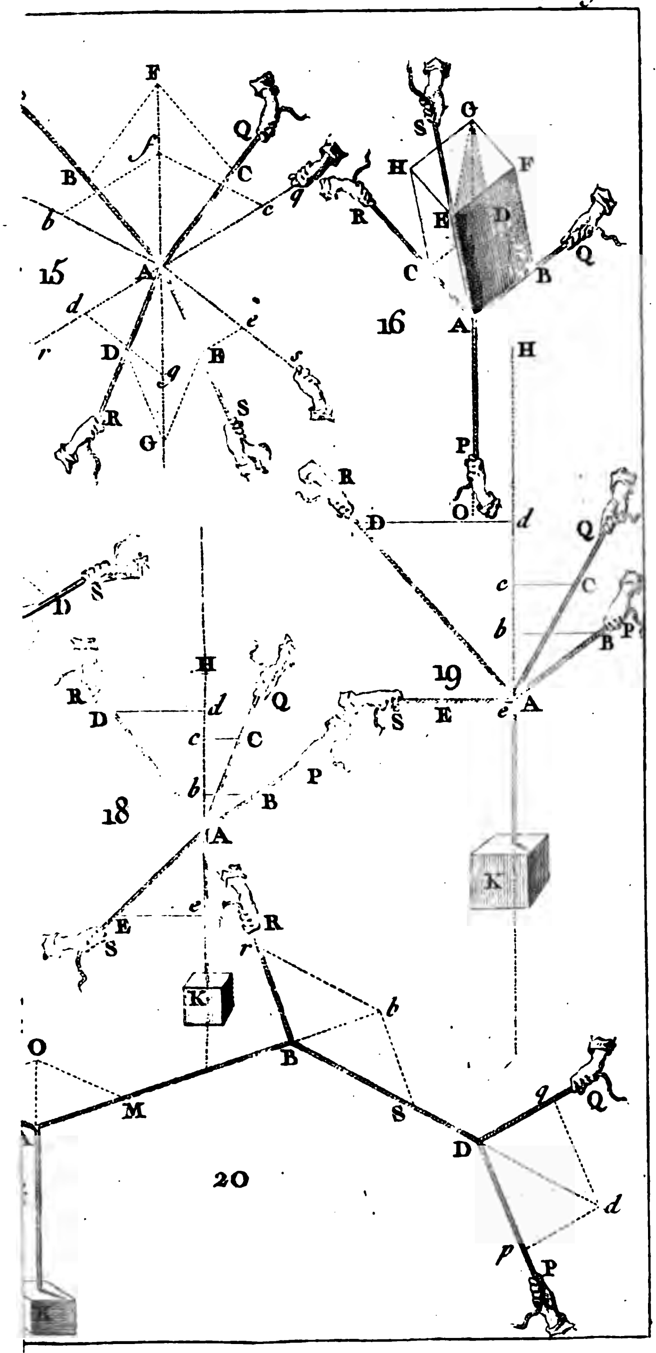
$A : M :: ABCDA \times AE : MNOPM \times MQ,$
ou $:: AG \times AE : MR \times MQ,$
ou $:: AC \times AE : MO \times MQ$

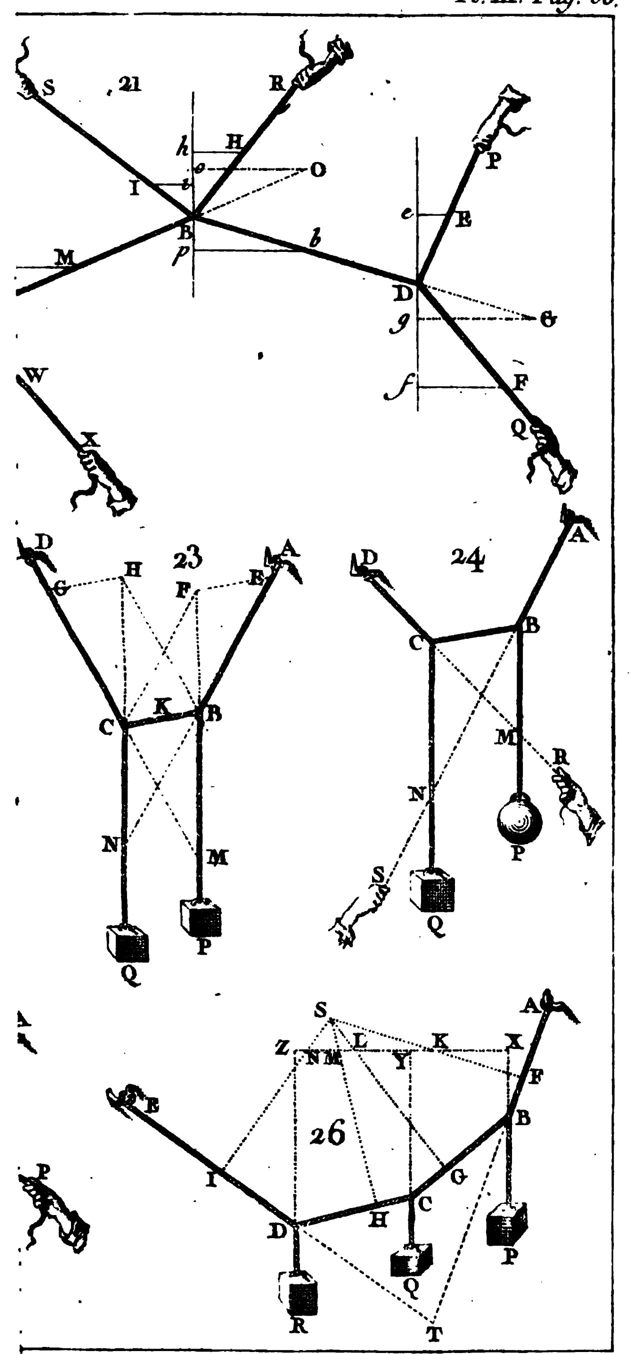
pourront être divisés par AE & MQ, sans rien changer à leur rapport, & l'on aura cette proportion $A : M :: ABCDA : MNOPM$ ou $:: AG : MR$ ou $:: AC : MO$; c'est-à dire que les tensions de deux lignes circulaires poussées dans tous leurs points par des forces égales dirigées de leurs centres à leurs circonférences, sont proportionnelles à leurs circonférences, ou à leurs rayons, ou à leurs diamètres.

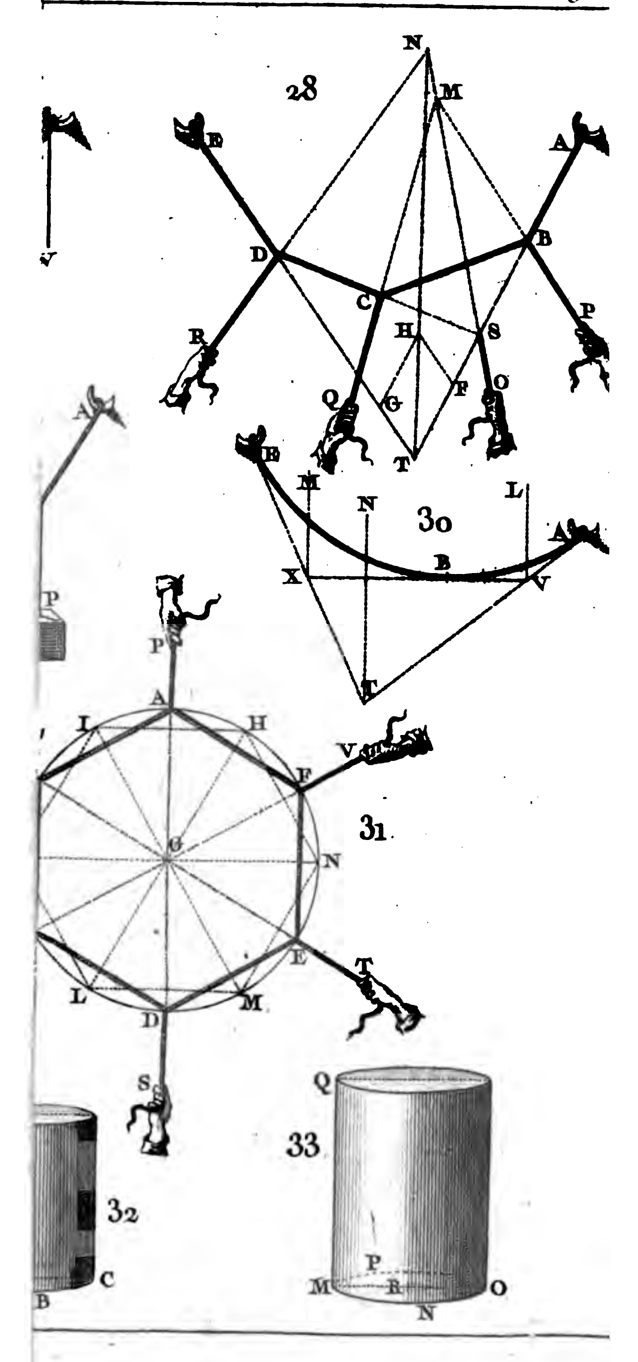




3
4
7
8
9
10
13
P
Q
K
G
N
A
R
O
M
S
T
B
I
H
F
C
a
b
c
d
e
f
g
p
q
t
m
n
r


15
16
18
19
20


21
S
R
H
h
e
O
I
i
B
M
p
b
P
e
E
D
g
G
f
F
Q
W
X
23
D
H
F
E
A
G
K
C
B
N
M
Q
P
24
D
A
C
B
M
R
N
S
Q
P
26
S
A
Z
N M
L
Y
K
X
F
B
E
I
G
C
H
D
Q
P
R
T


28
N
M
E
A
D
B
C
H
S
P
R
Q
G
F
O
T
30
E
M
N
L
A
X
B
V
T
P
A
L
H
V
F
31
G
N
E
T
L
M
D
S
P
33
Q
32
C
B
M
R
O
N

ÉLÉMENS
DE
MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE QUATRIEME.

Des Leviers.

DÉFINITIONS.

342. LE *Levier* est une verge inflexible *MN* à laquelle trois puissances P, Q, *R*, sont appliquées à différens points *M*, *N*, *O*. Fig. 35 & 36.

On considére ordinairement deux sortes de leviers, l'un droit, & l'autre angulaire; & l'on imagine toûjours qu'une puissance *R* est appliquée au sommet *O* de l'angle de ce dernier.

Pour examiner géométriquement le levier, on le considére d'abord comme s'il n'avoit point de pesanteur, sauf à regarder son poids comme une quatrième puissance qui lui seroit appliquée.

Le levier étant principalement fait pour élever des poids, ou pour surmonter des résistances dont les quantités de force peuvent toûjours être évaluées en poids; au lieu de concevoir trois puissances appliquées à un levier *MN*, on suppose ordinairement qu'il y a un poids *P*, une puissance Q, & un appui *R* qu'on Fig. 37. 38 & 39.

nomme aussi *hypomoclion* : & les trois différens arrangemens que le poids *P*, la puissance Q, & l'appui R peuvent avoir par rapport au levier, & principalement par rapport au levier droit, font distinguer trois espèces de leviers.

Fig. 37, 40 & 43. 343. On appelle *Levier de la première espèce* celui *M R N* dont l'appui *R* est placé entre le poids *P* & la puissance Q. Dans ce levier, le poids & la puissance tirent ou poussent d'un même côté; & l'appui est placé au dessous du levier.

Fig. 38, 41 & 44. 344. On appelle *Levier de la seconde espèce* celui où le poids *P* est placé entre la puissance Q & l'appui *R*. Dans cette espèce de levier, la puissance & le poids tirent de différens côtés; & l'appui est encore placé au dessous du levier.

Fig. 39, 42 & 45. 345. Enfin l'on nomme *Levier de la troisième espèce* celui où la puissance Q est placée entre le poids *P* & l'appui *R*. Dans ce troisième levier, la puissance & le poids agissent de différens côtés comme dans celui de la seconde espèce; mais l'appui est placé au dessus du levier.

Fig. 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 & 45. 346. *Si à la place du poids* P *& de l'appui* R *on substitue deux puissances, dont l'une agisse verticalement & soit égale au poids* P, *& dont l'autre soit égale à la résistance de l'appui, & tire dans la direction suivant laquelle l'appui résiste; il n'y aura plus aucune différence entre les trois espèces de leviers qu'on vient de définir, & ils se réduiront tous à un seul & même levier, qui ne sera qu'une verge inflexible à laquelle trois puissances seront appliquées de manière que l'une d'elles agira contre les deux autres. On pourra donc se dispenser*

de distinguer les trois espèces de leviers ; que les trois différentes dispositions du poids, de la puissance & de l'appui ont fait imaginer.

En considérant le levier comme une verge inflexible tirée par trois puissances ou par un nombre quelconque de puissances, on peut aisément le rapporter à la machine funiculaire dont on a parlé dans le Livre précédent. Ainsi une partie des choses que l'on dira sur l'équilibre des puissances appliquées à des leviers, ne sera dans le fond qu'une répétition de ce qu'on a dit sur l'équilibre des forces appliquées à des cordes attachées à différens points d'un même corps.

347. Les droites RE, RF menées du point R où l'appui soûtient le levier, perpendiculairement sur les directions des puissances P, Q, se nomment les *Distances* de ces puissances à l'appui ; & le produit de chaque puissance multipliée par sa distance à l'appui, s'appelle le *Moment* de cette puissance. Ainsi $P \times RE$ est le moment de la puissance P, & $Q \times RF$ est le moment de la puissance Q. Fig. 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44 & 45.

Si les directions des puissances P, Q sont parallèles, les distances RE, RF de ces puissances à l'appui seront dans une même ligne droite ; & lorsque le levier sera droit, les directions des puissances P, Q demeurant parallèles ; les triangles MRE, NRF seront semblables, & l'on aura $RE : RF :: RM : RN$; c'est-à-dire que les distances des deux puissances P, Q à l'appui seront proportionnelles aux parties du levier comprises entre les directions de ces puissances & l'appui. Fig 37, 38, 39, 40, 41 & 42. Fig. 37, 38 & 39.

348. Lorsque le levier est droit, ses parties RM, RN comprises entre l'appui & les directions Fig. 37, 38 & 39.

des puissances *P*, Q, sont quelquefois nommées des *Bras de levier* de ces puissances. Mais comme on ne fait guère usage de ces bras de levier ; que dans le cas où ils sont proportionnels aux distances des puissances à l'appui, on ne donne ordinairement le nom de bras de levier aux parties *RM*, *RN* du levier droit, que quand les directions des puissances *P*, Q appliquées à ce levier sont parallèles ; & ce n'est qu'improprement qu'on les appelle bras de levier, lorsque les directions des puissances *P*, Q ne sont pas parallèles.

Fig. 40, 41 & 42. Lorsque le levier *MRN* n'est pas droit, & que les deux puissances *P*, Q qu'on lui applique sont parallèles, les perpendiculaires *RE*, *RF* tirées de l'appui sur les directions de ces puissances sont encore en ligne droite : alors on réduit ordinairement le levier courbe *MRN* au levier droit *ERF*.

Fig. 43, 44 & 45. Enfin, lorsque les deux puissances *P*, Q appliquées à un levier droit ou courbe ne sont pas parallèles, & qu'on a tiré des perpendiculaires *RE*, *RF* de l'appui *R* du levier sur les directions de ces puissances, on réduit le levier *MRN* droit ou courbe à un levier angulaire *ERF* ; & les distances *RE*, *RF* des puissances *P*, Q à l'appui, sont prises pour les bras de levier de ces puissances.

THÉORÈME.

Fig. 46, 49 & 50. 349. *Lorsque deux puissances* P, Q *appliquées à deux points* M, N *d'un levier soûtenu par un point d'appui* R, *sont en équilibre ; la direction* AR *de la charge ou de la résistance de l'appui, & celles des deux puissances* P, Q, *sont toutes trois dans un même plan, & passent par un même point* A *ou sont parallèles.*

DÉMONSTRATION.

Puisque le levier *M N* tiré par les deux puissances *P*, *Q* est retenu en repos par la résistance de l'appui *R*; la direction de la résistance de cet appui, & celle de la force résultante des deux puissances *P*, *Q* sont directement opposées : ainsi ces deux directions sont dans une même ligne droite & passent par un même point *A*.

Mais il est clair, par tout ce qui a été dit dans le Livre second au sujet de la composition des forces, que les directions de deux puissances *P*, *Q* & celle de leur résultante sont dans un même plan, & passent par un même point *A* ou sont parallèles.

Donc la direction *A R* de la charge ou de la résistance de l'appui, & celle des deux puissances *P*, *Q*, sont aussi toutes trois dans un même plan, & passent par un même point *A* ou sont parallèles. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

350. Puisque les directions non parallèles *MP*, *NQ* de deux puissances *P*, *Q* appliquées à un levier *M N* soûtenu en équilibre par un appui *R*, rencontrent en un même point *A* la direction *A R* ou *R A* de la résistance de cet appui, & qu'on peut sans inconvénient supposer qu'une puissance est appliquée à quel point l'on veut de sa direction, rien n'empêchera de considérer ce point *A* comme le nœud de trois cordons *A P*, *A Q*, *Ar* tirés par trois puissances *P*, *Q*, *r* qui se retiennent mutuellement en équilibre. Cela posé, tout ce qu'on a dit dans le troisième Livre au sujet de la machine funiculaire composée Fig. 46, 49 & 50.

de trois cordons qui partent d'un même nœud *A*, & qui sont tirés par trois puissances en équilibre, conviendra au levier *MN* tiré par deux puissances *P*, *Q*, & soutenu en équilibre par un appui *R*: on en va voir des exemples dans le Problême suivant & ses Corollaires.

PROBLEME.

Fig. 48, 49 & 50. 351. *Connoissant les directions de deux puissances* P, Q *appliquées à un levier, & la situation de l'appui* R *sur lequel ce levier ou ces puissances sont en équilibre, trouver en quels rapports sont les quantités de force de ces deux puissances, & la charge ou la résistance de l'appui.*

Solution.

Puisque les deux puissances *P*, *Q* appliquées au levier *MN* sont en équilibre, leur résultante & la résistance de l'appui sont deux forces égales & directement opposées. Ainsi les directions de ces deux forces sont dans la même ligne droite, & par conséquent passent par les mêmes points.

Mais la direction de la résultante des deux puissances *P*, *Q* passe par le point *A* où concourent celles de ces deux puissances; & la direction de la résistance de l'appui *R* passe par cet appui.

Donc si l'on mène une ligne droite de l'appui *R* au point *A* où concourent les directions des deux puissances *P*, *Q*, cette droite sera en même temps la direction de la résistance de l'appui & celle de la résultante des deux puissances *P*, *Q*.

Ainsi connoissant les directions des deux puissances *P*, *Q*, & ayant trouvé la direction *AR* ou *RA* de leur

leur résultante *R*, le Problème se réduira à trouver sur ces directions trois parties proportionnelles aux trois forces *P*, *Q*, *R*. Quoiqu'on ait donné différens procédés pour trouver ces rapports, depuis le n°. 287 jusqu'au n°. 296; on croit qu'il n'est point inutile d'en faire une récapitulation succinte, en les appliquant au levier.

I.

352. On tirera une droite *RA* de l'appui *R* au point *A* où concourent les directions des deux puissances *P*, *Q*; puis ayant pris sur cette ligne une partie quelconque *AF* pour représenter la résultante de ces deux puissances, on mènera par le point *F* deux parallèles *FC*, *FB* aux directions des mêmes puissances; & l'on aura un parallélogramme *ABFC* dont les côtés *AB*, *AC* & la diagonale *AF* représenteront les quantités de force des deux puissances *P*, *Q* & celle de leur résultante ou la résistance de l'appui; c'est-à-dire qu'en nommant *R* la résistance de l'appui, on aura (*n*°. 287) $P : Q : R :: AB : AC : AF$. Fig. 48, 49 & 50.

II.

353. Si l'on fait un triangle *GHI* dont les côtés *GH*, *HI*, *GI* soient parallèles aux directions *AP*, *AQ*, *AR* des deux puissances *P*, *Q* & de la résistance de l'appui *R* du levier, on aura (*n*°. 288) $P : Q : R :: GH : HI : GI$. Fig. 48 & 47, ou 50 & 51.

III.

354. Si l'on fait un triangle *STV* dont les côtés *ST*, *TV*, *SV* soient perpendiculaires sur les directions *AP*, *AQ*, *AR* des deux puissances *P*, *Q* Fig. 48 & 43, ou 50 & 54.

& de la résistance de l'appui, on aura (*n*°. 289) *P* : Q : *R* : : *ST* : *TV* : *SV*.

Au lieu de faire un triangle dont les côtés soient perpendiculaires sur les directions données AP, AQ, AR, *on pourroit construire un triangle* STV *dont les côtés* ST, TV, SV *fissent des angles égaux avec les mêmes directions; & l'on auroit encore* (n°. 289) P : Q : R : : ST : TV : SV.

IV.

Fig. 53, 54 & 55. 355. Par le point *A* où concourent les directions des deux puissances *P*, Q, ayant décrit une circonférence de cercle *AMGN* qui rencontre ces directions en deux points quelconques *M*, *N*, & qui coupe en quelque point G la direction *AR* ou *RA* de la résistance de l'appui; si l'on tire les trois cordes G*M*, G*N*, *MN*, on aura (*n*°. 290 ou 234) *P* : Q : *R* : : G*N* : G*M* : *MN*; c'est-à-dire que chacune des trois forces *P*, Q, *R* sera représentée par la corde qui se terminera aux directions des deux autres.

On conclurra de-là (*n*°. 291 ou 235) que deux quelconques des trois forces *P*, Q, *R* sont réciproquement proportionnelles à deux droites qui font des angles égaux avec leurs directions, & qui partent d'un même point de la direction de la troisième.

Et comme des perpendiculaires tirées d'un point quelconque de la direction de quelqu'une des trois forces *P*, Q, *R*, sur les directions des deux autres, feront des angles égaux avec ces directions; il est clair que deux quelconques des trois forces *P*, Q, *R* sont en raison réciproque des lignes menées d'un

point quelconque de la direction de la troisiéme perpendiculairement sur leurs directions.

V.

356. Si l'on tire une droite *MON* qui rencontre les directions des trois forces *P*, *Q*, *R* en trois points quelconques *M*, *N*, *O*, on aura (*n*°. 293) *P* : *Q* : *R* :: *AM* × *NO* : *AN* × *MO* : *AO* × *MN*; c'est-à-dire que chacune des trois forces *P*, *Q*, *R* sera représentée par le produit fait de la partie de sa propre direction comprise entre le point de concours *A* & la droite *MON*, multipliée par la partie de cette droite *MON*, terminée par les directions des deux autres forces. Fig. 53, 54 & 55.

Ainsi lorsqu'un levier *MRN* sera droit, c'est-à-dire, lorsque le point d'appui *R* se confondra avec le point *O*, chacune des trois forces *P*, *Q*, *R* sera représentée par le produit fait de sa propre direction comprise entre le point de concours *A* & le levier, multipliée par la portion du levier comprise entre les directions des deux autres forces.

V I.

357. Lorsque les directions des puissances *P*, *Q* seront parallèles, on pourra les considérer comme si elles concouroient en un point *A* infiniment éloigné du levier : alors la direction de la résistance de l'appui concourant avec elles en ce même point *A*, leur sera parallèle, & les parties *AM*, *AN*, *AO* des directions de ces trois forces devenant infinies, seront égales. Ainsi au lieu d'avoir, comme ci-devant, *P* : *Q* : *R* :: *AM* × *NO* : *AN* × *MO* : *AO* × *MN*, Fig. 56, 57 & 58.

on aura $P:Q:R::NO:MO:MN$; c'est-à-dire que si les directions des deux puissances P, Q sont parallèles & appliquées à un levier droit MON, ou coupées par une droite MON qui rencontre en quelque point O la direction de la résistance R de l'appui, chacune des trois forces P, Q, R sera représentée par la partie du levier ou de la droite MON, comprise entre les directions des deux autres.

Cette Solution pouvoit être plus aisément déduite du n°. 355, puisque NO, MO, MN *sont trois lignes qui font des angles égaux avec les directions des trois puissances* P, Q, R.

V I I.

Fig. 46, 49 & 50. 358. Puisque les deux puissances P, Q & la résistance R de l'appui sont proportionnelles aux côtés AB, AC & à la diagonale AF du parallélogramme $ABFC$, on en conclurra, comme on a fait (n°. 295 ou 240), que $P:Q:R::S.\,{\scriptstyle CAF}:S.\,{\scriptstyle BAF}:S.\,{\scriptstyle BAC}$; c'est-à-dire que les deux puissances P, Q & la résistance R de l'appui sont trois forces dont chacune peut être représentée par le sinus de l'angle que les directions des deux autres font entr'elles.

COROLLAIRE I.

Fig. 46, 49 & 50. 359. Puisque dans le cas où les deux puissances P, Q appliquées au levier ne sont point parallèles, ces deux puissances & la résistance R de l'appui sont trois forces qu'on peut représenter par les trois côtés d'un triangle ABF, & que chaque côté d'un triangle est toûjours moindre que la somme & plus grand que la différence des deux autres côtés; il est clair que chacune des trois forces P, Q, R dont les

directions ne sont point parallèles, est aussi plus petite que la somme & plus grande que la différence des deux autres.

Mais dans le cas où les deux puissances P, Q sont parallèles, & que l'on tire une droite MON qui rencontre les directions de ces deux puissances en deux points M, N, & la direction de la résistance R de l'appui en un point O; puisqu'on trouve $P : Q : R :: NO : MO : MN$, il est clair que chacune de ces trois forces est égale à la somme ou à la différence des deux autres. Fig. 56, 57 & 58.

COROLLAIRE II.

360. Donc si de l'appui R on mène deux droites RE, RF perpendiculaires aux directions des deux puissances P, Q, ou qui fassent des angles égaux avec ces directions; on aura $P \times RE = Q \times RF$. Car (n°. 354) on aura $P : Q :: RF : RE$; & par conséquent $P \times RE = Q \times RF$. Fig. 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, & 45.

COROLLAIRE III.

361. Donc deux puissances P, Q appliquées à un levier, & la résistance R de l'appui, sont en équilibre dans tous les cas suivans;

1°. Lorsqu'elles sont représentées, tant pour leurs quantités de force que pour leurs directions, par les côtés AB, AC & la diagonale AF ou FA d'un parallélogramme $ABFC$; Fig. 46, 49 & 50.

2°. Lorsqu'elles sont proportionnelles & parallèles aux côtés GH, HI, GI d'un triangle GHI; Fig. 46, & 47, ou 50 & 51.

3°. Lorsqu'elles sont proportionnelles & perpendiculaires ou également inclinées aux côtés ST, TV, SV d'un triangle STV; Fig. 46 & 48, ou 50 & 52.

Fig. 53, 54 & 55. 4°. Lorsqu'après avoir décrit par leur point de concours A une circonférence qui rencontre leurs directions en trois points M, N, G, & qu'après avoir tiré les cordes GN, GM, MN, chacune des trois forces est représentée par la corde qui se termine aux directions des deux autres ; c'est-à-dire, lorsqu'on trouve $P : Q : R :: GN : GM : MN$;

Ou bien (ce qui revient au même) lorsque deux quelconques des trois forces P, Q, R sont réciproquement proportionnelles à deux droites qui sont perpendiculaires ou également inclinées à leurs directions, & qui partent d'un même point de la direction de la troisième ;

Fig. 53, 54 & 55. 5°. Lorsqu'ayant tiré une droite MON qui rencontre en trois points M, N, O les directions des trois forces P, Q, R qu'on suppose concourir en un point A, l'on trouve

$P : Q : R :: AM \times NO : AN \times MO : AO \times MN$;

Fig. 46, 48 & 50. 6°. Lorsque chacune des trois forces P, Q, R est représentée par le sinus de l'angle que les directions des deux autres font entr'elles ;

Fig. 56, 57 & 58. 7°. Lorsque les directions des deux puissances P, Q, & par conséquent celle de la résistance R de l'appui, sont parallèles, & qu'après avoir tiré une droite MON qui rencontre les directions de ces trois forces en trois points M, N, O, l'on trouve $P : Q : R :: NO : MO : MN$; c'est-à-dire, lorsque chaque force est représentée par la partie de la droite MON, comprise entre les directions des deux autres.

Car si les trois forces P, Q, R n'étoient pas en équilibre dans tous les cas que l'on vient d'exposer, on pourroit les mettre en équilibre en augmentant

ou diminuant la quantité de force de quelqu'une d'elles ; & alors elles seroient en équilibre sans être dans les rapports où l'on a démontré (*n°.* 352-358) qu'elles doivent se trouver lorsqu'elles sont en équilibre : ce qui est impossible.

THÉOREME.

362. *Si tous les points* M, P, R, Q, N, &c. *d'une droite* MN *située comme on voudra, sont poussés vers un même point* A *avec des forces variables & toûjours proportionnelles à leurs éloignemens* MA, PA, RA, QA, NA, &c. *de ce point* A, *ou représentées par ces éloignemens ;* Fig. 185.

1°. *Cette droite* MN *sera soûtenue en équilibre par un appui* R *placé au milieu de sa longueur ;*

2°. *Il en résultera à l'appui* R *la même charge, que si tous les points de la ligne* MN *étoient poussés avec des forces uniformes & parallèles, représentées par des lignes égales à la droite* RA *menée du milieu de la droite* MN *au centre* A *des forces.*

DÉMONSTRATION.

La droite *RA* tirée du milieu de *MN* au centre *A* des forces, étant prolongée au-delà de la droite *MN* d'une quantité $RB = RA$; soient tirées par tant de points qu'on voudra pris deux à deux dans la ligne *MN* à distances égales de son milieu, des droites *MA*, *NA* & *PA*, *QA*, &c. vers le point *A*, & des droites *MB*, *NB* & *PB*, *QB*, &c. vers le point *B* : les quadrilatères *AMBN*, *APBQ*, &c. seront des parallélogrammes qui auront tous la même diagonale *AB* menée par le milieu *R* de la droite *MN*.

Or des deux forces représentées par les côtés, *MA*, *NA* du parallélogramme *AMBN*, avec lesquelles les deux points *M*, *N* seront poussés vers le point *A*, il résultera à la ligne *MN* une force qui sera représentée par la diagonale *BA*, tant pour sa grandeur que pour sa direction ; & des deux forces représentées par les côtés *PA*, *QA* du parallélogramme *APBQ*, avec lesquelles les deux points *P*, *Q* également éloignés du milieu *R* de la droite *MN*, seront poussés vers le même point *A*, il résultera encore à la ligne *MN* une force représentée par la même diagonale *BA*, tant pour sa grandeur que pour sa direction ; & ainsi des autres : c'est-à-dire que de chaque couple de points pris dans la droite *MN* à distances égales de son milieu R, & poussés vers le point *A* avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce point, il résultera à la droite *MN* une force représentée par *BA*.

Mais 1°. toutes ces forces résultantes, dont chacune sera représentée par *BA*, tant pour sa grandeur que pour sa direction, passeront par le milieu de la droite *MN* : ainsi en mettant un appui *R* sous ce milieu, on les arrêtera toutes, & la droite *MN* sera par conséquent en équilibre. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Si deux points quelconques *M*, *N* ou *P*, *Q* pris dans la ligne *MN* à distances égales de son milieu *R*, étoient poussés par deux forces représentées par des lignes égales & parallèles à *RA*, il en résulteroit au milieu de la droite *MN* une force qui seroit représentée par 2 *RA* ou par *BA*, & qui seroit par conséquent la même que celle qui résulte à cette ligne, lorsque les deux points quelconques *M*, *N* ou *P*, *Q* sont poussés vers le point *A* avec des forces

représentées par leurs éloignemens de ce point. Donc la résultante du système de toutes les forces dont l'appui *R* se trouvera chargé sera la même dans le cas où tous les points de la droite *MN* seront poussés vers le point *A* avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce point, & dans celui où tous les points de la même ligne seront poussés avec des forces représentées par des lignes égales & parallèles à *RA*. *c. q. f.* 2°. *d.*

COROLLAIRE.

363. Ainsi lorsque tous les points d'une droite *MN* inclinée comme on voudra à la droite *RA* menée de son milieu au centre *A* des forces, seront poussés avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce centre *A*; on pourra supposer que le milieu *R* de cette ligne est le seul point qui soit poussé vers le centre *A*, avec une force représentée par le produit de la ligne *RA* multipliée par le nombre des points de la droite *MN*, c'est-à-dire avec une force représentée par $RA \times MN$; & par conséquent le milieu *R* de la droite *MN* sera le centre de gravité de cette ligne, dans le cas où tous ses points seront poussés vers le même point *A* par des forces proportionnelles à leurs éloignemens de ce centre, aussi-bien que dans le cas où les mêmes points seront poussés par des forces égales & parallèles entr'elles. Fig. 59.

THÉOREME.

364. *Lorsque tous les points de deux droites* MN, mn *situées comme on voudra, dans le même plan ou dans différens plans, sont poussés vers un même centre* A *avec des forces représentées par leurs éloignemens* Fig. 60.

de ce centre, & que (n°. 363) *les forces centrales des deux droites* MN, mn *divisées dans leurs milieux par des lignes centrales* RA, rA, *sont par conséquent représentées par* RA × MN, rA × mn; *si l'on joint les centres de gravité ou milieux* R, r *de ces deux lignes par une droite* Rr, *& qu'on divise cette ligne en parties* FR, Fr *réciproquement proportionnelles aux longueurs des deux droites* MN, mn, *en sorte que l'on ait* Fr : FR :: MN : mn:

1°. *Les deux droites* MN, mn *seront en équilibre sur le point* F, *& ce point* F *sera par conséquent le centre de gravité de leur système, comme si tous les points de ces deux lignes étoient poussés par des forces égales & parallèles entr'elles.*

2°. *Il résultera sur l'appui* F *une charge dirigée vers le centre* A *& représentée par* FA × (MN + mn), *comme si tous les points des deux droites* MN, mn *étoient rassemblés au point* F, *& que chacun d'eux fût poussé vers le point* A *avec une force représentée par* FA.

Démonstration.

Par le centre A des forces & par le point F soit tirée une droite AFB, qu'on terminera en quelque point B par une droite RB parallèle à Ar; & par le point B soit menée une droite BC parallèle à RA, pour avoir un parallélogramme $ARBC$ dont la diagonale BA passe par le point d'appui F.

1°. Puisqu'on suppose $MN : mn :: Fr : FR$, & que les triangles semblables AFr, BFR donneront
$Fr : FR :: rA : RB = CA$;
on aura $MN : mn :: rA : CA$.

Mais $RA : rA :: RA : rA$.

Donc en multipliant par ordre ces deux dernières proportions, on aura $RA \times MN : rA \times mn :: RA : CA$; c'est-à-dire que les forces centrales des deux droites MN, mn seront proportionnelles aux côtés contigus RA, CA du parallélogramme $ARBC$; ainsi ces deux forces, dont la résultante sera dirigée (nos. 223 & 228) suivant la diagonale BA du même parallélogramme, seront en équilibre sur l'appui F placé dans cette diagonale. C. Q. F. 1°. D.

2°. Les deux triangles semblables AFr, BFR donneront $FA : FB :: Fr : FR$:
& comme on a fait $Fr : FR :: MN : mn$,
on aura $FA : FB :: MN : mn$,
ou (*componendo*) $FA : FA + FB :: MN : MN + mn$;
c'est-à-dire, $FA : BA :: MN : MN + mn$.
Or $RA : FA :: RA : FA$.
Ainsi en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $RA : BA :: RA \times MN : FA \times (MN + mn)$.

Mais puisqu'on vient de voir que les forces centrales des deux droites MN, mn sont proportionnelles aux côtés contigus RA, CA du parallélogramme $ARBC$, suivant lesquels ces forces sont dirigées; la force centrale $RA \times MN$ de la droite MN, & la résultante des forces centrales des deux droites MN, mn, seront proportionnelles aux deux droites RA, BA, & par conséquent aux deux produits $RA \times MN$, $FA \times (MN + mn)$. Ainsi puisque la force centrale de la droite MN est représentée par le produit $RA \times MN$, la résultante des forces centrales des deux droites MN, mn, ou la charge de l'appui F, sera dirigée vers le centre A

& représentée par le produit $FA \times (MN + mn)$.

C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 61. 365. Si du point d'appui F, sur lequel on vient de voir que les deux droites MN, mn sont en équilibre, l'on mène une droite FG au milieu ou centre de gravité G d'une troisième droite BC, & qu'on divise la droite FG en H, de manière que l'on ait $MN + mn : BC :: HG : HF$;

1°. Le système des trois droites MN, mn, BC, dont on suppose que tous les points sont poussés vers le centre A avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce centre, seront en équilibre sur le point H; en sorte que le point H sera le centre de gravité de ce système, comme si tous ces points étoient poussés par des forces égales & parallèles entr'elles.

2°. La force résultante des trois droites MN, mn, BC ou la charge du point H, sera représentée par $HA \times (MN + mn + BC)$, comme si tous les points des trois droites MN, mn, BC étoient réunis au point H, & que chacun d'eux y fût poussé par une force centrale représentée par HA.

Car si par le point F l'on mène une droite $IK = MN + mn$, qui soit divisée en deux parties égales par ce point, & dont tous les point soient poussés vers le centre A avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce centre, il en résultera (n°. 363) au point F une charge représentée par $FA \times IK$ ou par $FA \times (MN + mn)$, & qui sera par conséquent égale à la charge que les deux droites MN, mn produisent sur le même point. Mais

(n°. 364) le ſyſtème des deux lignes IK, BC ſera en équilibre ſur le point H, & il en réſultera à ce point une charge dirigée ſuivant HA, & repréſentée par $HA \times (IK + BC) = HA \times (MN + mn + BC)$. Ainſi le ſyſtème des trois lignes MN, mn, BC ſera auſſi en équilibre ſur le point H, & la charge qui en réſultera à ce point ſera repréſentée par $HA \times (MN + mn + BC)$.

On démontrera de la même manière que ſi du point H, ſur lequel le ſyſtème des trois droites MN, mn, BC eſt en équilibre, l'on mène une droite HL vers le milieu ou centre de gravité L d'une quatrième droite DE, & qu'on diviſe HL en P, de manière que l'on ait cette proportion $MN + mn + BC : DE :: PL : PH$; le ſyſtème des quatre lignes MN, mn, BC, DE ſera en équilibre ſur le point P, & qu'il en réſultera à ce point P une charge repréſentée par le produit $PA \times (MN + mn + BC + DE)$; en ſorte que le point P ſera le centre de gravité du ſyſtème des quatre lignes MN, mn, BC, DE, comme ſi tous les points de ces lignes étoient pouſſés vers le centre A par des forces parallèles dont chacune fût repréſentée par PA.

Si l'on fait le même raiſonnement ſur un ſyſtème compoſé d'un plus grand nombre de lignes droites, on trouvera toûjours que ce ſyſtème aura le même centre de gravité dans le cas où tous ſes points ſeront pouſſés vers un même centre avec des forces repréſentées par leurs éloignemens de ce centre, & dans celui où les mêmes points ſeroient pouſſés par des forces égales & parallèles entr'elles; & l'on trouvera

dans le premier cas, que la force résultante au centre de gravité sera la même que si tous les points du système étoient réunis à ce centre, & que chacun d'eux y fût poussé avec une force représentée par la distance du centre de gravité au centre des forces.

Corollaire II.

Fig. 62. 366. Le contour *BCDEF* d'un polygone ou d'une portion de polygone quelconque, étant un système composé de plusieurs lignes droites, il suit du Corollaire précédent, que 1°. son centre de gravité *P* sera le même dans le cas où tous ses points seront poussés vers un même centre *A*, avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce centre, & dans celui où les mêmes points seroient poussés par des forces égales & parallèles entr'elles. 2°. Dans le premier cas, il en résultera au centre de gravité *P* la même force que si tous les points du système *BCDEF* étoient réunis à ce point *P*, & que chacun d'eux fût poussé vers le centre *A* avec une force représentée par *PA*; en sorte que la force résultante du système *BCDEF* sera représentée par $BCDEF \times PA$.

Et comme une ligne droite dont le milieu seroit en *P*, & qui seroit de même longueur que le système *BCDEF*, auroit ce point *P* pour centre de gravité, & auroit la même force centrale résultante que *BCDEF*; on pourra regarder le contour de tout polygone ou de toute portion de polygone, comme une ligne droite qui seroit de même longueur que ce contour, & qui auroit son milieu au centre de gravité *P* de ce contour.

COROLLAIRE III.

367. Une ligne courbe quelconque *BCDEF* pouvant être regardée comme un polygone d'une infinité de côtés, il est clair (*n°*. 366) que 1°. elle aura le même centre de gravité *P* dans le cas où tous ses points auront des forces centrales représentées par leurs éloignemens du centre *A*, & dans celui où ses points seront poussés avec des forces égales & parallèles; 2°. dans le premier cas, la force du centre de gravité *P* sera la même que si tous les points de la courbe étoient réunis à ce centre de gravité commun, & que chacun d'eux fût poussé vers le centre *A* des forces, avec une force représentée par *PA*; 3°. enfin cette ligne courbe, considérée par rapport à sa force centrale résultante, pourra être regardée comme une ligne droite de même longueur qu'elle, & dont le milieu seroit au centre de gravité *P* de cette courbe. Fig. 63.

COROLLAIRE IV.

368. Il suit des Corollaires précédens, que toutes les surfaces planes ou courbes, & tous les solides dont tous les points seront poussés vers un même centre avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce centre, auront le même centre de gravité que si tous leurs points étoient poussés par des forces égales & parallèles entr'elles; & que la force résultante de ce centre de gravité sera la même que si tous les points de la surface ou du solide étoient réunis à ce centre, & que chacun d'eux fût poussé vers le centre des forces, avec une force représentée par la distance de ce centre au centre de gravité.

Car toutes les surfaces planes & tous les solides sont des systèmes composés d'une infinité de filets infiniment déliés qu'on peut regarder comme des lignes droites ; ainsi ils sont dans le cas du Corollaire premier.

A l'égard des surfaces courbes, elles sont des systèmes composés d'élémens courbes qu'on peut considérer comme des lignes courbes, & (n° 367) chaque ligne courbe peut être regardée comme une ligne droite qui a même longueur & même centre de gravité qu'elle ; en sorte que les surfaces courbes considérées par rapport à leurs forces centrales, peuvent être rapportées à des systèmes composés de lignes droites qui ont les mêmes forces centrales & les mêmes centres de gravité particuliers que leurs élémens courbes : ainsi ces surfaces courbes sont aussi dans le cas du Corollaire premier.

Il suit du dernier Corollaire, que pour trouver le centre de gravité d'une surface ou d'un corps, dans le cas où tous ses points seront poussés vers un même centre avec des forces représentées par leurs éloignemens de ce centre, on pourra suivre les principes établis dans le Livre premier pour les centres de gravité.

Scholie.

369. Nous avons dit (n°. 7) que *le centre de gravité d'un corps est un point par lequel le corps étant soûtenu ou suspendu, reste immobile dans quelque situation qu'il soit, comme si toute la pesanteur de ce corps étoit réunie à ce point, & poussoit ce corps par ce seul point.*

D'après cette définition, nous avons ajoûté (n°. 11) & démontré dans la suite du premier Livre, que si

la

la pesanteur est une force constante & qu'elle agisse sur toutes les parties d'un même corps, toute étendue considérée comme pesante, aura un centre de gravité tel que nous l'avons défini. Mais pour ne point laisser prendre de préjugé, nous avons averti, & c'est ici le lieu de le démontrer, que *si la pesanteur, quoique supposée constante, n'agissoit pas suivant des directions parallèles sur toutes les parties d'un même corps, aucun corps, excepté la sphère, n'auroit un centre de gravité tel que nous l'avons défini.*

Supposons que le point A est le centre de la terre, vers lequel toutes les parties des corps pesans tendent à descendre, & que MN est une droite sans pesanteur divisée en deux également & perpendiculairement par une droite RA. Si tous les points de la droite MN, pris deux à deux à distances égales de son milieu R, sont également pesans, il est évident que cette ligne sera en équilibre sur son milieu R; puisque tous ses points pris deux à deux à distances égales de ce milieu R seront symmétriquement placés par rapport au centre A. Fig. 64.

Mais si la droite MN devient inclinée à la droite RA menée de son milieu au centre A de la terre; par exemple, si cette ligne prend la position mn, & que tous ses points pris deux à deux à distances égales de son milieu R, demeurent également pesans, elle ne sera plus en équilibre sur son milieu R, & sa moitié Rm qui se sera approchée du centre de la terre, l'emportera sur l'autre moitié Rn qui se sera éloignée du même centre.

Pour le démontrer, soient pris sur la droite mn deux points quelconques P, Q, à distances égales de son milieu R. On a fait voir (*n*°. 356) que si les

deux points pesans P, Q étoient en équilibre sur le point R, on auroit $P : Q :: AP \times RQ : AQ \times RP$, ou $:: AP : AQ$, puisqu'on suppose $RQ = RP$; c'est-à-dire que la pesanteur du point P seroit moindre que celle du point Q dans le rapport de AP à AQ. Mais on suppose que les deux points P, Q sont également pesans. Donc le poids P qu'on a rapproché du centre de la terre, est trop pesant pour être en équilibre avec le point Q, & l'emportera par conséquent sur ce point Q.

Comme on démontrera de la même manière que tout autre point de la moitié Rm qui s'est approchée du centre A de la terre, l'emportera sur le point correspondant de l'autre moitié qui s'est éloignée du même centre; il est évident que la droite MN qui étoit en équilibre sur son milieu R dans sa première situation MN perpendiculaire à RA, ne sera plus en équilibre sur le même point R, dans sa nouvelle situation mn oblique à RA, & que sa moitié Rm la plus proche du centre de la terre, l'emportera sur l'autre moitié Rn la plus éloignée du même centre. Ainsi la droite MN ou mn n'aura point de centre de gravité tel que nous l'avons défini (*n*°. 7), dans le cas où elle ne sera pas assez éloignée du centre de la terre, pour que les actions de la pesanteur sur tous ses points puissent être regardées comme parallèles.

Ce qu'on vient de démontrer pour une ligne droite, se conclurra par analogie de tous les plans & de tous les corps, excepté la sphère dont tous les points seront toûjours symmétriquement placés par rapport à la droite tirée de son centre au centre de la terre, & qui sera par conséquent en équilibre sur

son centre dans toutes les situations qu'on voudra lui donner.

PROBLEME.

370. *Connoissant les quantités de force & les directions de deux puissances* P, Q *appliquées à deux points* M, N *d'un levier, avec la position de ce levier; trouver le point* R *où il faut placer l'appui pour mettre ces puissances en équilibre, & déterminer la charge de cet appui.* Fig. 48, 49 & 50.

SOLUTION.

Puisque les deux puissances *P*, Q doivent être en équilibre sur l'appui *R* qu'on demande, cet appui doit nécessairement être appliqué au levier dans la direction de la résultante des deux puissances *P*, Q, & être chargé de toute la force de cette résultante. Ainsi le Problème se réduit à trouver la direction & la quantité de force de la résultante des deux puissances P, Q; ce qu'on a fait en différentes manières dans le second Livre, & principalement depuis le n°. 242 jusqu'au n°. 248.

PROBLEME.

371. *Connoissant la quantité de force & la direction d'une puissance* P *appliquée à un point déterminé* M *d'un levier donné de position, & connoissant la quantité de force seulement d'une seconde puissance* Q *appliquée à un autre point* N *du même levier, avec la position de l'appui R de ce levier; trouver la direction que doit avoir la puissance* Q *pour être en équilibre avec la puissance* P. Fig. 65 & 66.

SOLUTION.

De l'appui donné *R* ſoit menée une perpendiculaire *RE* ſur la direction connue de la puiſſance *P*: cette perpendiculaire ſera connue de grandeur & de direction.

Pour que les deux puiſſances *P*, Q dont les quantités de force ſont connues, ſoient en équilibre ſur l'appui donné *R*, il faut qu'elles ſoient réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires menées de cet appui ſur leurs directions. Ainſi ſuppoſant pour un moment que la direction de la puiſſance Q eſt trouvée, & qu'on a mené de l'appui ſur elle une perpendiculaire *RF*; on aura cette proportion Q : *P* : : *RE* : *RF*, dont les trois premiers termes ſeront connus, & dont on trouvera par conſéquent le quatrième *RF* par les régles ordinaires.

La diſtance *RF* de l'appui *R* à la direction demandée de la puiſſance Q étant trouvée, du point d'appui *R* comme centre & d'un rayon égal à *RF*, on décrira un arc de cercle *FAF* dans le plan de la puiſſance *P* & de l'appui, & par le point donné *N* on mènera à cet arc deux tangentes *FN*Q, *NF*Q qui feront les deux directions que la puiſſance Q peut avoir pour être en équilibre avec la puiſſance *P*.

Si l'on veut avoir les points *F*, *F* où les deux directions de la puiſſance Q rencontrent l'arc *FAF*, on mènera la droite *RN*, & l'on décrira ſur elle comme diamètre un cercle *NFRF* qui rencontrera l'arc *FAF* en deux points *F*, *F*, par leſquels paſſeront les deux directions *FN*Q, *NF*Q qu'on peut donner à la puiſſance Q. *c. q. f. t.*

REMARQUE.

372. On doit remarquer que le Problème sera impossible, si la proportion $Q:P::RE:RF$ fait trouver pour RF une quantité plus grande que la droite RN menée de l'appui au point N auquel la puissance Q est appliquée. Car alors le point N se trouvera au dedans du cercle qui aura RF pour rayon; ainsi l'on ne pourra point mener de tangente du point N à ce cercle. Fig. 65 & 66.

Il faut encore remarquer que si les deux puissances P, Q étoient données de grandeur seulement, & qu'aucune des deux ne fût donnée de direction, le Problème auroit une infinité de Solutions. Car on pourroit donner à la puissance P une infinité de directions différentes; & pour chacune de ces directions, on trouveroit deux directions particulières convenables à la puissance Q pour être en équilibre avec la puissance P.

PROBLEME.

373. *Connoissant la quantité de force & la direction d'une puissance* P *appliquée au point* M *d'un levier dont la situation & l'appui sont donnés; trouver les quantités de force & les directions de toutes les puissances* Q, S, T *qu'on peut appliquer à un point donné* N *du même levier, pour faire équilibre avec la puissance* P. Fig. 67 & 68.

SOLUTION.

Puisque toutes les puissances Q, S, T qu'on demande doivent chacune en particulier faire équilibre avec la puissance P, il faut que leurs directions soient toutes dans un même plan avec l'appui & la direction de

la puissance *P*; de plus, la puissance *P* & chacune des puissances Q, *S*, *T* doivent être réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires menées de l'appui *R* sur leurs directions.

Il suit de-là que si, dans le plan de la puissance *P* & de l'appui, l'on mène par le point donné *N* du levier une droite *N* Q suivant une direction quelconque, pourvû qu'elle ne passe point par l'appui *R*; & qu'après avoir tiré par l'appui *R* des perpendiculaires *RE*, *RF* à la direction de la puissance *P*. & à la droite *FN*Q, l'on applique au levier suivant la direction *N*Q une puissance Q telle que l'on ait *RF*: *RE* : : *P* : Q; cette puissance Q ainsi dirigée, sera une de celles qu'on peut appliquer au point *N* du levier pour faire équilibre avec la puissance *P*.

Comme la direction *N* Q de la puissance Q qu'on vient de déterminer a été prise à volonté, & qu'on peut choisir une infinité d'autres directions pour y appliquer d'autres puissances; il est clair qu'il y a une infinité de puissances différentes qui, séparément appliquées au même point *N*, peuvent faire équilibre avec la puissance *P* donnée de grandeur & de direction : or chacune de ces puissances peut être déterminée de la même manière qu'on a trouvé la puissance Q.

Corollaire.

Fig. 47 & 48. 374. Une des puissances Q qui peut faire équilibre avec la puissance *P* donnée de grandeur & de direction, étant déterminée, si on la représente par une partie *NB* de sa direction, prise depuis le point *N* où elle est appliquée au levier, & qu'ayant tiré la droite *RN* on lui mène une parallèle *BCD*;

toutes les puissances S, T, &c. qu'on appliquera au point donné N pour faire équilibre avec la puissance P, & dont les directions couperont nécessairement la droite BCD, puisqu'elles seront dans un même plan avec cette ligne, seront représentées par les parties NC, ND, &c. de leurs directions, comprises entre le point donné N & la droite BCD; en sorte qu'on aura $Q:S:T:$&c$::NB:NC:ND:$&c.

Car si l'on décrit un cercle sur la droite RN comme diamètre, & que l'on mène des cordes RF, RG, RH, &c. aux points où les directions des puissances Q, S, T, &c. prolongées s'il est nécessaire, rencontrent la circonférence de ce cercle; chacun des angles RFN, RGN, RHN, &c. étant compris dans un demi-cercle, sera droit: ainsi les droites RF, RG, RH, &c. seront penpendiculaires sur les directions des puissances Q, S, T, &c. & seront par conséquent les distances de l'appui R aux directions de ces puissances. Donc puisque chacune des puissances Q, S, T, &c. doit être en équilibre avec la puissance P, on aura $\left\{\begin{array}{l} Q:P::RE:RF \\ P:S::RG:RE \\ P:T::RH:RE \end{array}\right\}$.

Multipliant la première de ces trois proportions par ordre, avec chacune des deux autres.

on aura . . . . $\left\{\begin{array}{l} Q:S::RG:RF \\ Q:T::RH:RF \end{array}\right\}$.

Mais si l'on tire les droites FG, GH, les triangles $\left\{\begin{array}{l} GRF \\ HRF \end{array}\right\}$ seront semblables aux triangles $\left\{\begin{array}{l} BNC \\ BND \end{array}\right\}$. Car les angles à la circonférence $\left\{\begin{array}{l} FGR \\ FHR \end{array}\right\}$ sont égaux à l'angle FNR lequel, à cause des parallèles NR, BD,

eſt égal aux angles $\begin{Bmatrix} NBC \\ NBD \end{Bmatrix}$; & les angles $\begin{Bmatrix} GRF \\ FRH \end{Bmatrix}$, qui ont pour meſures les moitiés des arcs $\begin{Bmatrix} FG \\ FGH \end{Bmatrix}$, ſont égaux aux angles $\begin{Bmatrix} BNC \\ BND \end{Bmatrix}$ qui ont pour meſures les moitiés des mêmes arcs. Ainſi ces triangles ſemblables donneront $\begin{cases} RG:RF::NB:NC \\ RH:RF::NB:ND. \end{cases}$

On aura donc $\begin{Bmatrix} Q:S::NB:NC \\ Q:T::NB:ND \end{Bmatrix}$, ou $Q:S:T::NB:NC:ND$; & par conſéquent la puiſſance Q qui peut faire équilibre avec la puiſſance *P*, étant repréſentée par *NB*, les puiſſances *S*, *T*, &c. qui pourront auſſi être en équilibre avec la puiſſance *P*, ſeront repréſentées par *NC*, *ND*, &c.

PROBLEME.

Fig. 53, 54 & 55. 375. *Connoiſſant les quantités de force & non les directions de deux puiſſances* P, Q *appliquées à deux points* M, N *d'un levier dont la poſition & l'appui ſont donnés, avec la charge nommée* R *de cet appui; trouver les directions que doivent avoir ces puiſſances* P, Q *pour être en équilibre.*

Solution.

Par les points donnés *M*, *N* où les puiſſances P, Q ſont appliquées au levier, ſoit menée la droite *MN*, & ayant fait ſur elle un triangle *MGN* tel que l'on ait $P:Q:R::GN:GM:MN$, ſoit circonſcrit un cercle à ce triangle. Puis du point G par l'appui *R* ſoit tirée la corde *GRA*; l'extrémité *A* de cette corde ſera le point par lequel doivent paſſer les directions des deux puiſſances *P*, Q qu'on

veut mettre en équilibre. Ainsi en menant du point *A* par les points donnés *M*, *N* du levier les droites *M P*, *N Q*, ces deux droites seront les directions demandées des deux puissances *P*, *Q*. C. Q. F. T.

Car les quantités des trois forces données *P*, *Q*, *R* étant proportionnelles aux trois cordes *GN*, *GM*, *MN*, ces trois forces seront en équilibre (*n°*. 361).

PROBLEME.

376. *Connoissant les quantités de force de deux puissances* P, Q, *avec la grandeur de la charge qui en doit résulter à l'appui donné d'un levier dont la situation est déterminée ; connoissant aussi le point* N *par lequel la puissance* Q *doit être appliquée à ce levier, avec un point quelconque* O *de la direction que doit avoir l'autre puissance* P *pour être en équilibre avec la puissance* Q ; *trouver les directions des deux puissances* P, Q, *& le point* M *où la puissance* P *doit être appliquée au levier.* Fig. 69 & 70.

SOLUTION.

Par l'appui donné *R*, & par le point donné *N* du levier, où la puissance Q doit être appliquée, on mènera une droite *RN*; & ayant fait sur cette droite un triangle *RGN* tel qu'on ait *P*:*Q*:*R*::*RN*:*RG*:*GN*, on lui circonscrira un cercle *RGNA*; puis par le point G & par le point donné O de la direction de la puissance *P*, on mènera une droite indéfinie *GOA* qui rencontrera le levier en quelque point *M* où il faudra appliquer la puissance P, & qui coupera la circonférence en quelque point *A* par lequel doivent passer les directions des deux puissances P, Q pour

que ces puissances soient en équilibre avec les conditions proposées. Ainsi en menant par le point trouvé *A* & par les points donnés *O*, *N* les droites *MP*, *NQ*, ces droites seront les directions demandées des deux puissances *P*, *Q*. C. Q. F. T.

PROBLEME.

Fig. 53, 54 & 55. 377. *Deux puissances* P, Q *appliquées à deux points déterminés* M, N *d'un levier quelconque, étant données de grandeur seulement, avec la grandeur de la charge qui en doit résulter à l'appui de ce levier; trouver les directions* MP, NQ *des deux puissances* P, Q, *& la situation de l'appui* R, *avec cette condition, que la direction* AR *ou* RA *de la charge de l'appui fasse avec la droite* MN *un angle donné.*

SOLUTION.

Soit tirée la droite *MN*, & ayant fait sur elle un triangle *MGN* tel qu'on ait *P* : *Q* : *R* : : *GN* : *GM* : *MN*, on lui circonscrira un cercle *GMNA*; puis ayant mené par le point *G* une droite *GRA* ou *AGR* qui fasse avec *MN* un angle égal à l'angle donné; cette droite rencontrera le levier en quelque point *R* où il faudra placer l'appui, & coupera la circonférence du cercle en un point *A* par lequel doivent passer les directions des deux puissances *P*, *Q*; en sorte que si par le point *A* & par les points donnés *M*, *N* on mène les droites *MP*, *NQ*, ces droites seront les directions demandées des deux puissances *P*, *Q*. C. Q. F. T.

PROBLEME.

Fig. 71 & 72. 378. *Connoissant les quantités de force de deux puissances* P, Q *appliquées à deux points donnés* M, N

d'un levier, avec la grandeur de la charge R *qui en doit résulter à l'appui inconnu du levier ; trouver l'appui de ce levier & les directions* M P, N Q *que doivent avoir les deux puissances* P, Q *pour être en équilibre, avec cette condition, que la direction* A R *de la charge de l'appui fasse un angle donné avec la droite* R N *tirée de l'appui inconnu au point* N *où la puissance* Q *est appliquée.*

SOLUTION.

Soit tirée une droite *M N* par les deux points du levier où les puissances *P*, Q sont appliquées ; & ayant fait sur elle un triangle *M G N* tel que l'on ait *P* : *Q* : *R* : : *G N* : *G M* : *M N*, on lui circonscrira un cercle *G M N A*. Puis ayant fait sur *G N*, comme base, un triangle isoscèle *G O N* dont chacun des angles *O G N*, *O N G* à la base soit égal à la moitié du supplément de l'angle donné que la direction de la charge de l'appui doit faire avec *R N*, afin que l'angle *G O N* devienne égal à l'angle donné ; on circonscrira à ce nouveau triangle un cercle *N O G R* qui rencontrera le levier en un point *R* où il faudra placer l'appui.

L'appui *R* étant trouvé, on mènera la droite *R G* qui, prolongée de part ou d'autre, rencontrera la circonférence du cercle *G M N A* en un point *A* par lequel doivent passer les directions des deux puissances *P*, Q ; en sorte que si par le point *A* & par les points donnés *M*, *N* du levier l'on mène les droites *M P*, *N Q*, ces droites seront les directions que doivent avoir les puissances *P*, Q pour être en équilibre avec les conditions demandées. C. Q. *F*. *T*.

Car puisque (*constr.*) $P : Q : R :: GN : GM : MN$; les puissances P, Q seront en équilibre sur l'appui R (*n*°. 361). Ainsi il ne reste plus qu'à démontrer que la direction AR de la charge de l'appui, fait avec la droite RN un angle égal à l'angle donné.

Les deux angles ARN, GON sont égaux, puisqu'ayant leurs sommets à la circonférence d'un même cercle, chacun d'eux a pour mesure la moitié du même arc GDN. Mais l'angle GON est (*constr.*) égal à l'angle que la direction de la charge de l'appui doit faire avec RN. Donc la direction AR de la charge de l'appui, fait avec la droite RN l'angle qu'on demande par les conditions du Problème.

SCHOLIE.

379. On rapporte au levier trois sortes de machines dont on se sert ordinairement pour peser des marchandises; savoir, la Balance, & deux espèces de Pesons qui sont en usage, l'un à Rome & qu'on appelle *Romaine*, l'autre en Danemarck & en Suède & qu'on appelle *Danoise*.

De la Balance.

Fig. 73. La *Balance* est une machine composée de deux bassins suspendus par des cordons aux extrémités d'un levier droit soûtenu en équilibre par son milieu. Son nom vient de *Bilanx* qui signifie *deux plats* ou *deux bassins*.

La balance est composée de plusieurs parties; d'un *Fléau AB*, d'un *Axe SX*, d'une *Chasse STX*, d'une *Aiguille CE*, & de deux *Bassins L*, *M*.

Le *Fléau AB*, qu'on nomme aussi *Traversin*, &

en latin *Jugum*, eſt un levier droit qui doit être aſſez ſolide pour porter ſans plier les poids & les marchandiſes que l'on veut peſer. Cette pièce eſt la partie de la balance la plus eſſentielle & la plus difficile à bien conſtruire. Les deux parties du fléau diviſé par l'axe dans le milieu de ſa longueur, s'appellent les *Bras* de la balance ou du fléau.

L'*Axe* SX placé au milieu de la longueur du fléau, eſt une eſpèce de couteau dont le tranchant eſt plus ou moins émouſſé, ſuivant que la balance eſt deſtinée à peſer & porter des marchandiſes & des poids plus ou moins peſans. C'eſt par le tranchant de ce couteau que le fléau doit s'appuyer, & ce tranchant doit être aſſez fin pour laiſſer au fléau la plus grande liberté de ſe balancer.

La *Chaſſe* STX, qu'on nomme auſſi la *Chape* ou l'*Anſe* de la balance, eſt deſtinée à ſoûtenir le fléau par ſon axe. Les extrémités de cette anſe ſont percées de deux trous garnis intérieurement de viroles ou de couſſinets très-durs qui ſervent d'appui à l'axe ou couteau de la balance.

L'*Aiguille* CE, qu'on nomme en latin *Examen*, eſt une verge droite attachée au milieu du fléau perpendiculairement à ſa longueur & à celle de l'axe. Cette aiguille fait juger de l'égalité ou de l'inégalité de la peſanteur des poids & des marchandiſes que l'on compare, ſuivant qu'elle eſt ou n'eſt pas exactement dans le plan de la chaſſe.

Les *Baſſins* L, M, en latin *Lances*, ſervent à contenir les poids & les marchandiſes que l'on pèſe : lorſqu'ils ſont creux, on les appelle *Baſſins*, & lorſqu'ils ſont plats, on les nomme *Plateaux*.

Après tout ce qu'on a dit sur l'équilibre des leviers, on reconnoît aisément que si la balance se soûtient en équilibre, sans être chargée d'autre chose que du poids de son fléau & de ses bassins, elle restera encore en équilibre lorsqu'on mettra dans ses bassins des poids égaux; & que si l'on charge ses bassins de poids inégaux, elle trébuchera du côté qu'on aura placé le poids le plus pesant. Ainsi, pour peser des marchandises avec cette première espèce de balance, il faut avoir une pile de poids connus de toute espèce, aussi pesante que la plus grande partie de marchandise qu'on veut peser.

Comme les balances doivent être extrêmement exactes, il est bon d'examiner ce qui peut les rendre fausses, & de parler des moyens d'en reconnoître les défauts.

1°. Si la balance à vuide n'est pas en équilibre, & qu'elle trébuche ou tende à trébucher d'un côté, elle favorisera le poids de la chose qu'on mettra du côté qu'elle tend à trébucher; c'est-à-dire que ce qu'on mettra de ce côté n'aura pas besoin d'être aussi pesant que ce qu'on mettra de l'autre côté, pour que la balance soit en équilibre. On corrigera aisément ce défaut, en chargeant le bassin le plus léger jusqu'à ce qu'il soit dans un équilibre parfait avec le plus pesant.

2°. Si les deux bras *CA*, *CB* du fléau, compris entre le tranchant de l'axe & les points *A*, *B* d'où pendent les bassins, ne sont pas de même longueur, la balance sera fausse. Car la balance étant en équilibre à vuide, il faudra, pour conserver son équilibre, mettre dans le bassin attaché au bras le plus long un corps moins pesant que dans l'autre. On reconnoîtra

ce défaut en changeant de baſſin les poids & les marchandiſes qui étoient en équilibre ; & ſi après ce changement un côté de la balance l'emporte ſur l'autre, ce ſera une marque que le bras du fléau ſera plus long de ce côté que de l'autre.

3°. Si le tranchant du couteau qui ſert d'axe, & les deux points *A*, *B* d'où pendent les baſſins, ne ſont pas exactement en ligne droite, la balance ſera défectueuſe.

Si le tranchant *C* du couteau eſt au deſſous de la droite *A B* ; pour peu que cette droite *A B* ſoit inclinée à l'horizon, elle ſera diviſée en deux parties inégales par la verticale *TC* qui paſſera par l'appui *C* ; & les poids placés dans les deux baſſins *L*, *M*, feront en même raiſon que les deux parties inégales *B D*, *A D* de la droite *A B* ; ainſi la balance ſera fauſſe, ou ne pourra mettre des poids égaux en équilibre que dans le cas où la droite *A B* ſera parfaitement horizontale. Comme la balance ſe précipitera toûjours du côté que la droite *A B* s'inclinera, dans le cas où les deux baſſins *L*, *M* ſeront chargés également, & que cette droite *A B* ſera preſque toûjours inclinée de l'un ou de l'autre côté, à cauſe de la grande difficulté qu'il y a de la mettre dans une ſituation parfaitement horizontale ; les deux baſſins *L*, *M*, quoique chargés de poids égaux, s'inclineront tantôt d'un côté & tantôt de l'autre ; ce qui fait donner à cette balance le nom de *Folle*. Fig. 74.

Si le tranchant du couteau ou le point d'appui *C* eſt au deſſus de la droite *A B*, la verticale *T C D* qui paſſera par ce point d'appui, diviſera la droite *A B* en deux parties inégales pour peu qu'elle ſoit inclinée ; & les deux poids placés dans les baſſins Fig. 75.

L, *M* étant en même rapport que les deux parties inégales *B D*, *A D*, seront inégaux dans le cas où ils seront en équilibre : ainsi la balance sera fausse. Cette dernière balance trébuchant difficilement, à cause de la facilité que la droite *AB* a de prendre une situation propre à l'équilibre des poids placés dans les deux bassins, on la nomme *Balance sourde*.

Fig. 73. Comme le tranchant du couteau est presque toûjours un peu au dessus de la droite *A B*, on a été obligé d'ajoûter l'aiguille au fléau de la balance, afin de reconnoître par sa situation dans l'anse, si la droite *A B* est dans une position horizontale & coupée en deux parties égales par la verticale de l'appui. Lorsqu'on pèse des marchandises précieuses, on a grand soin de mettre des poids jusqu'à ce que l'aiguille demeure exactement dans le plan de l'anse.

Du Peson, ou de la Romaine.

Fig. 76. Le *Peson* qu'on appelle aussi *Romaine*, peut-être à cause du grand usage dont il est à Rome, est propre à peser des marchandises de différentes pesanteurs, par le moyen d'un seul poids connu qui ne varie point.

Le *Peson* est un levier *A B* nommé *Fléau*, de fer ou de bois dur, suspendu par une anse *C D* qui le divise en deux bras *A C*, *B C* fort inégaux, & dont l'un doit être contenu plusieurs fois dans l'autre. On attache à l'extrémité *A* du bras *A C* le plus court, un bassin ou un crochet pour porter les marchandises dont on veut connoître le poids. L'autre bras *C B* passe au travers d'un anneau *H* qui porte un poids *F* appelé *Masse*, & qui est un peu tranchant par son bord intérieur.

Pour

Pour connoître le poids de la marchandise placée dans le bassin, on éloigne ou l'on rapproche la masse de la chape jusqu'à ce que le fléau demeure en équilibre; & le numéro de la division du fléau sur laquelle se trouve l'anneau *H* de la masse, indique le poids de la marchandise contenue dans le bassin.

La justesse de ce peson dépend principalement de l'exactitude avec laquelle son bras *B C* est divisé. Pour donner une idée de la manière de diviser ce bras, supposons que la masse *F* pèse une livre, & que le bras *B C*, sans être garni de sa masse, l'emporte sur le bras *C A* garni de son bassin. On approchera l'anneau *H* du point *C*, jusqu'à ce que le bras *B C* chargé de la masse fasse équilibre avec le bras *C A* chargé de son bassin dans lequel on aura mis un poids d'une livre. Ensuite ayant marqué 1 à l'endroit où reposera l'anneau pendant que la masse *F* sera équilibre avec la livre placée dans le bassin, on divisera le reste 1 *B* du bras *CB* en parties 1 2, 2 3, 3 4, &c. égales entr'elles & à la partie *C A* comprise entre le point de suspension *C* du fléau & le point *A* d'où pend le bassin ou le crochet.

Les divisions du fléau étant numérotées par les chiffres 1, 2, 3, 4, &c. comme on le voit daus la Figure 76; lorsque la masse sera en équilibre avec des marchandises soûtenues par le crochet ou par le bassin, le numéro de la division où se trouvera l'anneau de la masse, indiquera combien de livres ces marchandises pèsent.

Du Peson Danois.

Le *Peson* appelé *Danois*, parce qu'on s'en sert communément en Danemarck, & qu'on pourroit Fig. 77.

nommer *Suédois*, parce qu'il est presque le seul en usage en Suède, est une verge de bois ou de fer qui porte à son extrémité *B* un crochet ou un bassin pour soûtenir des marchandises, & qui se termine à son autre extrémité par une masse *A*.

La verge *BC* de ce peson passe au travers d'un anneau destiné à le soûtenir en équilibre.

Le point *C* de la verge, par lequel le peson garni de sa masse & de son crochet ou bassin vuide peut être soûtenu en équilibre, est le centre de gravité de ce peson.

On proportionne ordinairement la masse, la verge & le bassin ou le crochet, de manière que leur centre de gravité commun *C* soit un point très-proche de la masse *A*.

Pour connoître le poids de la marchandise soûtenue par le bassin ou par le crochet, on éloigne l'anneau de la masse jusqu'à ce que le peson chargé de la marchandise & porté par l'anneau demeure en équilibre : alors le numéro de la division de la verge où se trouve l'anneau, indique le poids de la marchandise soûtenue par le bassin ou par le crochet.

Lorsqu'on connoît le poids du peson & son centre de gravité, c'est-à-dire le point *C* sur lequel il demeure en équilibre à vuide, il est aisé de déterminer les divisions de la partie *BC* de sa verge.

Fig. 78. Car le poids du peson & de son bassin vuide devant être regardé comme une puissance verticale *P* appliquée à leur centre de gravité commun *C*, & le poids de la marchandise contenue dans le bassin comme une autre puissance verticale *Q* appliquée à l'extrémité *B* de la verge; lorsque le tout sera soûtenu en équilibre par l'anneau situé en quelque point *D*, on aura

$P:Q::BD:DC$, ou *componendo* $P+Q:P::BC:BD$, & par conséquent $BD = BC \times \frac{P}{P+Q}$. Ainsi imaginant successivement dans le bassin du peson tous les poids *une livre*, *deux livres*, *trois livres*, *quatre livres*, *&c.* on trouvera toutes les valeurs correspondantes de BD, c'est-à-dire tous les points de division D pour une livre, deux livres, trois livres, quatre livres, &c. en multipliant par le poids du peson la longueur BC de sa verge prise depuis son extrémité jusqu'à son centre de gravité, & divisant successivement le produit par le poids du peson, augmenté successivement d'une livre, de deux livres, de trois livres, de quatre livres, &c.

Supposons que le peson, c'est-à-dire l'assemblage de sa masse, de sa verge & du bassin ou du crochet, pèse une livre (car on ne comprend point dans la pesanteur du peson le poids de l'anneau qui doit le soûtenir en équilibre); on prendra sur la partie BC de sa verge des parties $B1$, $B2$, $B3$; $B4$; $B5$, $B6$; *&c.* égales à la moitié, au tiers, au quart, au cinquième, au sixième, au septième, &c. de la partie BC de la verge; & les points 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. indiqueront une livre, deux livres, trois livres, quatre livres, cinq livres, six livres, &c. c'est-à-dire que lorsque le bassin ou le crochet sera chargé de marchandise, & que l'anneau qui portera tout le système en équilibre répondra à la division numérotée 1, ou 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, &c. la marchandise pèsera une, ou deux, ou trois, ou quatre, ou cinq, ou six, &c. livres.

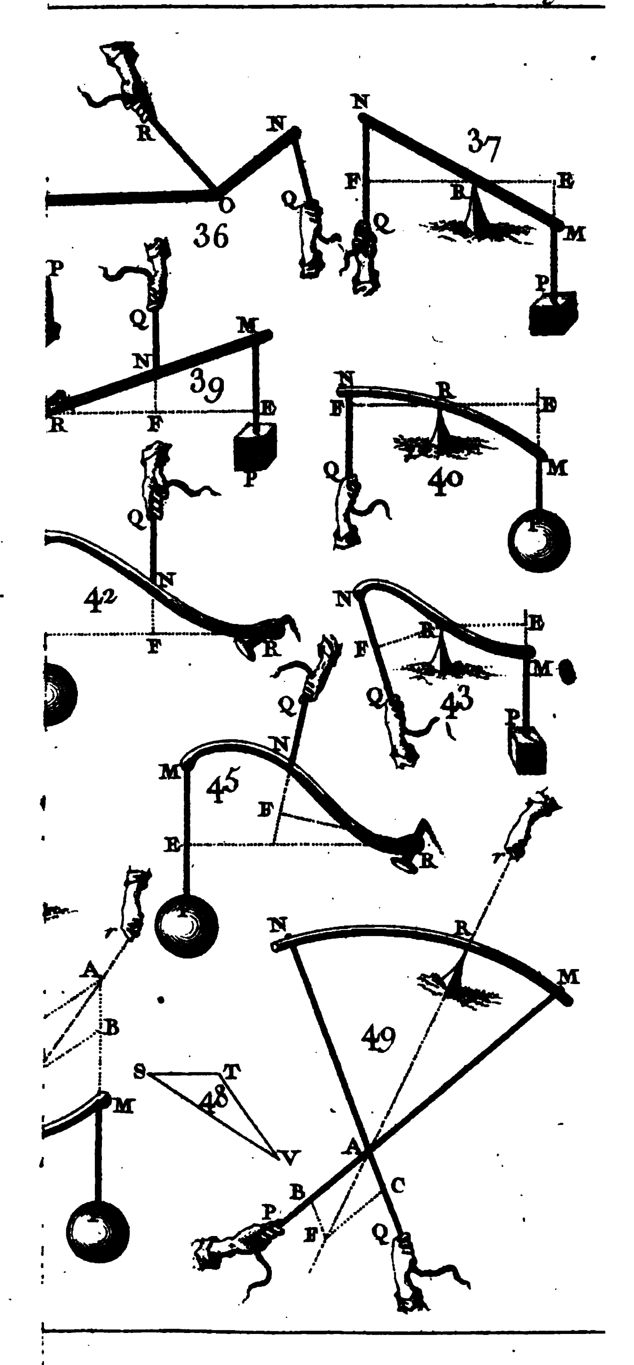
Si l'on veut marquer sur la verge du peson des divisions qui répondent à des poids moindres que la

livre; par exemple, si l'on veut peser des marchandises du poids d'un quarteron, ou d'une demi-livre, ou de trois quarterons; on prendra sur la partie *BC* de la verge des parties *B* $\frac{1}{4}$, *B* $\frac{1}{2}$, *B* $\frac{3}{4}$, égales aux $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{7}$ de *BC*, & les points marqués $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ seront les divisions qui répondront au quarteron, à la demi-livre & aux trois quarterons.

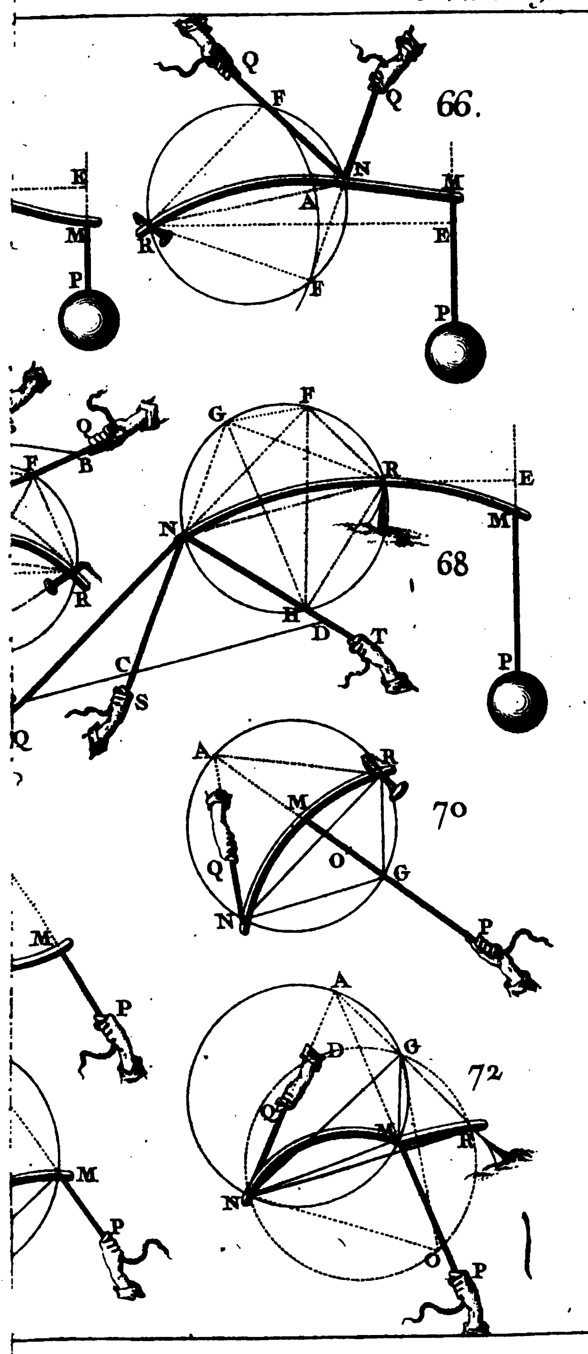
Si l'on vouloit marquer entre les divisions des livres d'autres divisions qui répondissent à une livre $\frac{1}{4}$, une livre $\frac{1}{2}$, une livre $\frac{3}{4}$, deux livres $\frac{1}{4}$, deux livres $\frac{1}{2}$, deux livres $\frac{3}{4}$, &c. on prendroit à commencer du point *B* des parties égales aux $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{4}{15}$, &c. de *BC*; & l'on auroit trois divisions qui partageroient en quatre parties l'espace compris entre 1 & 2, trois autres divisions qui partageroient en quatre parties l'espace compris entre 2 & 3, &c.

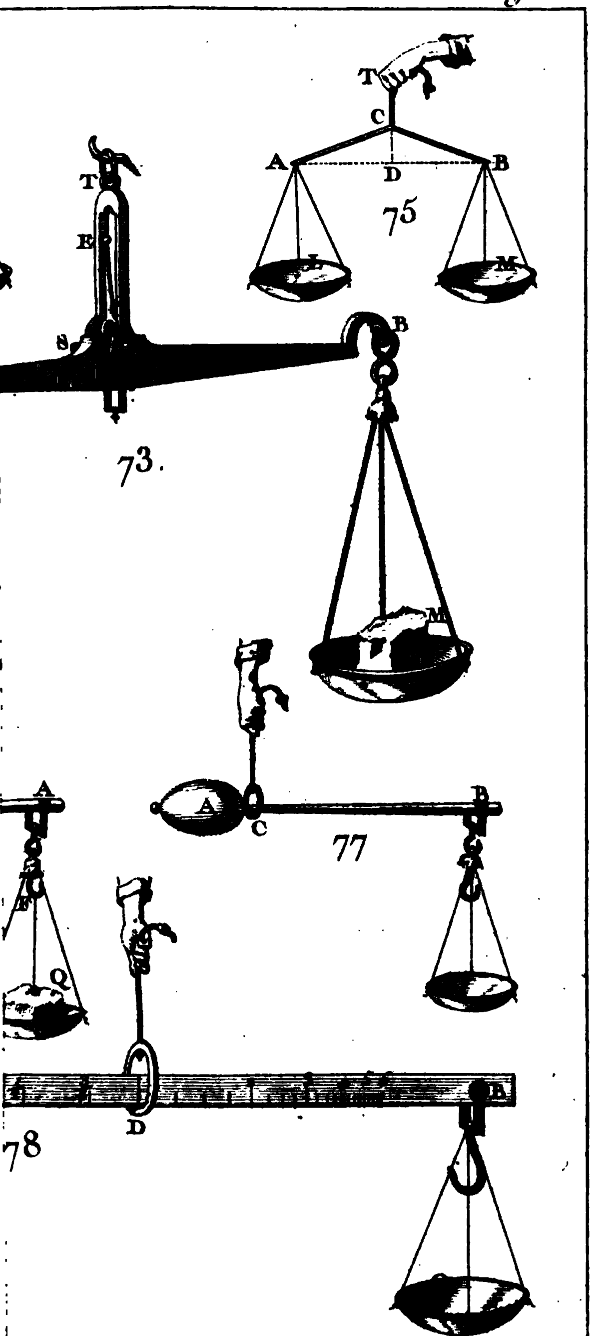
En supposant toûjours que le systême du peson non chargé de marchandise pèse une livre sans compter son anneau; on doit remarquer que pour avoir les divisions correspondantes à des poids en progression arithmétique dont un quarteron est la différence & le premier terme, il faudra prendre, à commencer du point *B*, des parties de *BC* égales aux $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{4}{16}$ &c. de cette ligne, & que les parties $\frac{4}{8}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{4}{16}$, &c. qui vaudront $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. répondront à une livre, deux livres, trois livres, &c.





36
37
39
40
42
43
45
48
49


66.
68
70
72


T
C
A
B
D
75
L
M
T
E
S
B
73.
M
A
A
C
B
77
F
Q
D
B
78



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE CINQUIEME.

Des Poulies & des Moufles.

DÉFINITIONS.

380. Une *Poulie* est une roue *MON* creusée à sa circonférence en forme de gorge pour recevoir une corde *PMONQ*, & traversée par un boulon ou essieu *T* sur lequel elle peut tourner dans une chape *ET*. Fig. 79, 80, 81 & 82.

L'essieu *T* qui passe au travers de la poulie par son centre, n'est souvent qu'une cheville ronde de fer ou d'une autre matière solide, qui passe librement dans la chape & dans la roue; en sorte que la roue en tournant peut obliger ou ne pas obliger cet essieu à tourner avec elle, suivant que le frottement de cet essieu est plus grand ou moindre dans la roue que dans la chape. Cette espèce d'essieu s'appelle communément *Goujon*.

Lorsque l'essieu entre quarrément dans la roue & qu'il y est fermement arrêté, en sorte que la roue ne peut pas tourner sans lui, on arrondit ses extré-

mités, afin qu'il tourne aisément dans les trous de la chape ; & ces bouts arrondis se nomment *Tourillons*.

Le creux que l'on fait sur la circonférence de la roue pour recevoir la corde, s'appelle *Gorge* de la poulie.

On nomme *Arc enveloppé* la partie *M O N* de la gorge que la corde couvre ; & l'on appelle *Soûtendante de l'arc enveloppé* la droite *M N* tirée par les extrémités de l'arc enveloppé. On ne donne point à cette droite *M N* le nom de *Corde*, pour ne la point confondre avec la corde *P M O N Q* qui passe sur la circonférence de la roue de la poulie.

Fig. 79. On appelle *Poulie immobile* celle dont la chape *E T* est attachée à un point fixe *R*, de manière qu'une puissance Q peut élever un poids *P* par le moyen d'une corde *P M O N* Q sans élever cette poulie.

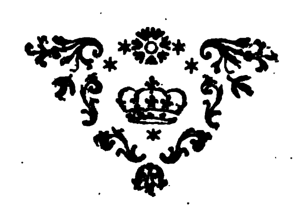
Fig. 80. Une poulie est nommée *Mobile*, lorsqu'une extrémité *P* de la corde qui embrasse la circonférence de sa roue est attachée à un point fixe *V*, & qu'une puissance Q appliquée à l'autre extrémité de cette corde élève la poulie avec sa chape. Pour élever un poids *R* au moyen d'une poulie mobile, on l'attache à la chape de cette poulie, & ce poids n'est élevé qu'autant que la poulie est élevée elle-même par la puissance Q.

Fig. 90 & 91. L'assemblage de plusieurs poulies dans une même chape s'appelle *Moufle*. On en distingue de deux sortes ; les moufles immobiles & les moufles mobiles. On appelle *Moufle immobile* celle dont la chape est immobile ou attachée à un point fixe ; & l'on nomme *Moufle mobile* celle dont la chape est mobile : cette dernière moufle est toûjours élevée avec le poids.

Lorſqu'on élève des poids par le moyen des moufles, on emploie toûjours une moufle mobile avec une moufle immobile, & toutes les roues de ces deux moufles ſont embraſſées par une même corde.

On eſtime les réſiſtances ou les charges des points fixes par des poids; & comme les poids peuvent être regardés comme des puiſſances, on comprendra ſouvent ſous le nom de puiſſance, non ſeulement les agens ou puiſſances proprement dites, & les corps peſans qu'on aura à élever, mais encore les réſiſtances des crochets auxquels ſeront fixées les chapes & les cordes des poulies.

Pour traiter géométriquement les poulies & les moufles, on les ſuppoſera ſans peſanteur, ſauf à regarder les poids de ces machines comme des parties des corps peſans que l'on voudra élever par leur moyen. On ſuppoſera auſſi les cordes parfaitement flexibles & ſans peſanteur, & l'on regardera les goujons ou tourillons des roues comme des lignes mathématiques roides qui roulent ſans aucun frottement dans les chapes ou dans les roues des poulies.



CHAPITRE I.

Des Poulies simples, & de la manière de multiplier les Forces par leur moyen.

I.

Fig. 79, 80, 81 & 82. 381. Lorsque deux puissances P, Q appliquées aux extrémités d'une corde *PMONQ* qui embrasse la roue d'une poulie, sont en équilibre avec une troisième puissance *R* appliquée par le moyen de la chape au centre *T* de la même poulie, & que la corde *PMONQ* est par conséquent dans un repos parfait aussi-bien que la poulie; rien n'empêche de supposer que cette corde est attachée à l'arc *MON* qu'elle enveloppe, & que les parties *MP*, *NQ* tangentes à la roue, sont arrêtées aux extrémités de l'arc *MON*.

II.

Fig. 80. 382. Si la puissance *R* appliquée à la chape de la poulie est un poids, & que l'on soit obligé d'avoir égard à la pesanteur de la poulie; on pourra regarder cette poulie & ce poids comme les parties d'un même système soûtenu en équilibre par les deux puissances *P*, Q appliquées à deux points *M*, *N* de ce système. Ainsi (*n*° 281) les directions *MP*, *NQ* des deux puissances P, Q, & celle de la pesanteur du système composé du poids *R* & de la poulie, seront dans un même plan, & passeront par un même point *A* ou seront parallèles entr'elles; & dans ce dernier cas on pourra supposer que ces trois directions concourent en un point *A* infiniment éloigné.

On pourra donc regarder le point *A* comme le nœud d'une machine funiculaire composée de trois cordons *AP*, *AQ*, *AR* tirés par trois puissances *P*, *Q*, *R* en équilibre.

La poulie étant toûjours considérée comme un corps pesant, si la puissance *R* appliquée à la chape tire de bas en haut suivant une direction verticale *TR*, elle soûtiendra tout le poids de la poulie & la force résultante des deux puissances *P*, *Q* appliquées aux extrémités de la corde *P M O N Q*. Ainsi la puissance *R* sera composée de deux parties, savoir d'une partie de force égale & directement opposée au poids de la poulie, & d'une autre partie de force propre à faire équilibre avec les deux puissances *P*, *Q*; en sorte que si l'on retranche de la puissance *R* le poids de la poulie, le reste de cette puissance & les deux autres puissances *P*, *Q* appliquées à la corde *P M O N Q*, pourront être considérées comme trois puissances en équilibre sur une poulie sans pesanteur. Fig. 81 & 82.

Si la poulie peut être considérée sans pesanteur, ou si sa pesanteur est assez petite par rapport aux trois puissances *P*, *Q*, *R*, pour qu'on puisse la négliger dans la comparaison de ces trois puissances; quelles que soient les directions *MP*, *NQ*, *TR* des trois puissances *P*, *Q*, *R*, on pourra (*n*°. 285) regarder ces directions comme une machine funiculaire composée de trois cordons qui seront dans un même plan & qui passeront par un même point *A*: car la puissance *R* appliquée à la chape de la poulie, pourra être regardée comme un poids dont la pesanteur agiroit suivant la direction *TR*. Fig. 79.

Tout ce qu'on a dit dans le Livre troisième au

ſujet d'une machine funiculaire composée de trois cordons aſſemblés par un même noeud, conviendra donc à trois puiſſances *P*, *Q*, *R* en équilibre ſur une poulie peſante, pourvû que la direction de la puiſſance *R* appliquée à la chape ſoit verticale; & conviendra auſſi à trois puiſſances *P*, *Q*, *R* en équilibre ſur une poulie conſidérée ſans peſanteur, quelles que ſoient les directions de ces trois puiſſances.

Fig. 79. Mais ſi le poids de la poulie eſt aſſez grand pour qu'on ne doive pas le négliger, & que la direction de la puiſſance *R* appliquée à la chape ne ſoit pas verticale; on ne pourra pas rapporter la poulie à une machine funiculaire composée de trois cordons aſſemblés par un même noeud, & l'on ſera obligé de la regarder comme un corps ſans peſanteur, tiré par quatre forces qui ſe retiennent mutuellement en équilibre; ſavoir, par deux puiſſances *P*, *Q* appliquées aux deux extrémités de la corde qui embraſſe la poulie, par une puiſſance *R* appliquée à la chape, & par une quatrième force verticale égale au poids de la poulie & appliquée à ſon centre de gravité. Et comme ces quatre forces ſe retiendront mutuellement en équilibre, il faudra que la réſultante des deux puiſſances *P*, *Q* appliquées aux extrémités de la corde *PMQNQ*, ſoit égale & directement opposée à la réſultante des deux autres forces. Or dans ce cas il pourra arriver que les trois puiſſances *P*, *Q*, *R* n'auront pas leurs directions dans un même plan; & qu'elles ne paſſeront pas par un même point *A*, lors même qu'elles ſeront dans un même plan.

III.

Fig. 79, 80, 81 & 82. 383. En conſidérant les directions des trois

puissances *P*, *Q*, *R* comme une machine funiculaire composée de trois cordons assemblés par un même nœud *A* qui peut être infiniment éloigné (ce qu'on ne doit faire que dans le cas où la puissance *R* est verticale, lorsqu'il faut avoir égard au poids de la poulie; & dans le cas où la poulie peut être considérée sans pesanteur, lorsque la puissance *R* n'est pas verticale); on doit remarquer que

1°. L'angle *PAQ* contenu entre les cordons *MP*, *NQ* qui touchent la roue de la poulie, sera divisé (*Géom. n°.* 287) en deux parties égales par la direction de la puissance *R*; puisque (*n°.* 382) la direction de cette puissance passera par le sommet *A* de l'angle *PAQ* & par le centre *T* du cercle touché par les côtés du même angle. Ainsi l'un des trois cordons de la machine funiculaire à laquelle on rapportera la poulie & les trois puissances *P*, *Q*, *R*, doit diviser l'angle des deux autres cordons en deux parties égales.

2°. Les trois puissances *P*, *Q*, *R* dont les directions passent par un même point *A* étant en équilibre; la puissance *R* appliquée à la chape, & dont la direction passe par le centre de la poulie, sera égale & directement opposée à la résultante des deux autres puissances *P*, *Q* appliquées à la corde qui embrasse cette poulie. Ainsi il faudra que la puissance *R*, ou la résultante des deux puissances *P*, *Q* soit représentée par une portion *AD* de la ligne qui divise l'angle *PAQ* des deux puissances *P*, *Q* en deux parties égales, pendant que ces deux puissances *P*, *Q* seront exprimées par les côtés *AB*, *AC* du parallélogramme *ABDC*, pris sur leurs directions; & comme tous les côtés de ce parallélogramme seront égaux, parce

que ſa diagonale *AD* diviſera ſon angle *BAC* en deux parties égales, il eſt évident que les deux puiſſances *P*, Q appliquées aux deux bouts de la corde qui embraſſe la poulie, ſeront égales.

3°. Les trois puiſſances *P*, Q, *R* étant toûjours ſuppoſées en équilibre, chacune d'elles (*n*°. 295 ou 296) ſera repréſentée par le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres; c'eſt-à-dire qu'on aura $P : Q : R :: S._{QAR} : S._{PAR} : S._{PAQ}$, ou $:: S._{QAT} : S._{PAT} : S._{PAQ}$; & comme les angles *QAT*, *PAT* ſont les moitiés de l'angle *PAQ* diviſé en deux parties égales par la direction de la puiſſance *R*, chacune des deux puiſſances *P*, Q appliquées aux extrémités de la corde qui embraſſe la poulie, ſera repréſentée par le ſinus de la moitié de l'angle *PAQ* compris entre les directions de ces deux puiſſances, pendant que la puiſſance *R* appliquée à la chape ſera repréſentée par le ſinus de l'angle entier *PAQ*.

IV.

Fig. 79, 80, 81 & 82.

384. Si du centre *T* de la roue de la poulie on mène deux rayons *TM*, *TN* aux extrémités de l'arc *MON* enveloppé par la corde, on pourra regarder l'aſſemblage de ces deux rayons comme un levier coudé *MTN* appuyé ſur le centre *T* de la poulie, & compoſé de deux bras égaux *TM*, *TN* perpendiculaires aux directions des deux puiſſances *P*, Q. Ainſi l'on pourra appliquer à la poulie tout ce qui a été dit dans le Livre quatrième au ſujet des leviers, pourvû qu'on réduiſe ces leviers à ceux dont les diſtances de l'appui aux directions des puiſſances ſont égales.

En considérant une poulie pesante ou non pesante comme un levier *M T N* appuyé sur le centre *T*, de la poulie, il est aisé de remarquer que les deux puissances *P*, Q appliquées aux extrémités de la corde qui embrasse la roue de la poulie, sont toûjours égales lorsqu'elles sont en équilibre. Car quelle que soit la direction de la puissance *R* qui soûtiendra l'appui *T* du levier formé par deux rayons *TM*, *TN* perpendiculaires aux directions des puissances *P*, Q, ces deux puissances seront réciproquement proportionnelles aux deux droites *TM*, *TN*; c'est-à-dire qu'on aura *P* : Q : : *TN* : *TM*, & par conséquent *P* = Q, puisque *TN* = *TM*.

THÉOREME.

385. *Lorsqu'une poulie considérée sans pesanteur est en équilibre, les deux puissances* P, Q *appliquées aux extrémités de la corde* PMONQ *qui embrasse la poulie, & la charge ou résistance* R *de la chape, sont trois forces proportionnelles aux rayons* TM, TN *de la poulie & à la soûtendante* MN *de l'arc* MON *enveloppé par la corde. Ainsi il faut prouver qu'on aura* P : Q : R : : TM : TN : MN. Fig. 79, 80, 81 & 82.

DÉMONSTRATION.

On a dit (*n°.* 382) que les directions *MP*, *NQ* des deux puissances *P*, Q, & celle *TR* de la puissance *R*, concourront en un même point *A* ou seront parallèles, & qu'on pourra regarder le point *A* comme le noeud d'une machine funiculaire composée de trois cordons *AP*, *AQ*, *AR* tirés par trois puissances *P*, Q, *R* en équilibre. Ainsi (*n°.* 289)

ces trois puissances seront proportionnelles aux trois côtés d'un triangle perpendiculaire à leurs directions.

Or si l'on tire les rayons *TM*, *TN* aux extrémités de l'arc *MON* enveloppé par la corde, & qu'on mène la soûtendante *MN*, on aura un triangle isoscèle *MTN* dont les deux côtés *TM*, *TN* seront perpendiculaires aux directions *AP*, *AQ* des deux puissances *P*, *Q*, & le troisième côté *MN* du même triangle sera perpendiculaire à la direction *AR* ou *TR* de la puissance *R*. Car (*Géom. n°.* 287) la droite *TA*, qui passe par le centre *T* de la poulie & par le sommet *A* de l'angle *MAN* formé par les deux tangentes *AP*, *AQ* de la poulie, divise le quadrilatère *AMTN* en deux parties *ATM*, *ATN* égales & semblables, & partage par conséquent l'angle *MTN* & sa mesure *MZN* en deux parties égales : d'où il suit (*Géom. n°.* 69) que *TA* sera perpendiculaire sur *MN*, & que *MN* sera réciproquement perpendiculaire sur *TA*.

Donc les trois puissances *P*, *Q*, *R* sont proportionnelles aux trois côtés *TM*, *TN*, *MN* du triangle *MTN*; c'est-à-dire qu'elles sont proportionnelles aux rayons *TM*, *TN* de la poulie, & à la soûtendante *MN* de l'arc *MON* enveloppé par la corde. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 79, 80, 81 & 82. 386. Si les directions des deux puissances *P*, *Q* ne sont pas parallèles, l'arc *MON* enveloppé par la corde sera moindre ou plus grand que la demi-circonférence, & sa soûtendante *MN* sera moindre que le diamètre ; ainsi chaque rayon sera plus grand que la moitié de cette soûtendante : d'où il suit que chacune des deux puissances *P*, *Q*, dont la quantité

de force est représentée par un rayon, sera plus grande que la moitié de la puissance *R* appliquée à la chape ou au centre *T* de la poulie.

Mais si les directions des deux puissances *P*, *Q* appliquées aux deux bouts de la corde sont parallèles, l'arc *MON* enveloppé par la corde sera une demi-circonférence; ainsi sa corde *MN* deviendra un diamètre, & chacun des rayons *TM*, *TN* par lesquels les quantités de force des puissances *P*, *Q* sont représentées, seront des moitiés de ce diamètre qui représente la puissance *R*. Donc chacune des deux puissances parallèles *P*, *Q* sera égale à la moitié de la puissance *R* appliquée à la chape. Fig. 83 & 84.

THÉOREME.

387. *Soit un poids* R *appliqué à la chape d'une poulie mobile* MTN *embrassée par une corde* PMNQ; *qu'une extrémité de cette corde soit arrêtée à un point fixe* P, *& que son autre extrémité soit attachée à la chape d'une seconde poulie mobile* IHK *embrassée par une seconde corde* SIKG; *qu'une extrémité de cette seconde corde soit attachée à un point fixe* S, *& que son autre extrémité tienne à la chape d'une troisième poulie mobile* EDF *embrassée par une troisième corde* VEFBO *dont une extrémité soit arrêtée à un crochet* V, *& l'autre extrémité soit tirée par une puissance* O. *Si l'on mène dans toutes ces poulies mobiles les soûtendantes* MN, IK, EF *des arcs enveloppés par les cordes, & qu'on tire des rayons aux extrémités de toutes ces soûtendantes; on aura la proportion suivante, dans le cas où le poids* R *& la puissance* O *se retiendront mutuellement en équilibre.* Fig. 85 & 86.

Le poids *R* appliqué à la chape de la première poulie *MTN*,

Eſt à la puiſſance *O* appliquée à la corde de la dernière poulie *EDF*;

Comme le produit $MN \times IK \times EF$ de toutes les ſoûtendantes des arcs enveloppés par les cordes,

Eſt au produit $MT \times IH \times ED$ des rayons de toutes les poulies mobiles.

Démonstration.

Soient nommées { *Q* la force ou la tenſion du cordon *NQ*, *G* la force ou la tenſion du cordon *KG*; *O* la force ou puiſſance du cordon *FB*.

Puiſque le ſyſtème de toutes les poulies eſt en équilibre, les trois forces appliquées à chaque poulie ſeront auſſi en équilibre. Cela poſé,

Les poulies { *MTN*, *IHK*, *EDF* } donneront { $R : Q :: MN : MT$, $Q : G :: IK : IH$, $G : O :: EF : ED$.

Ainſi en multipliant toutes ces proportions par ordre, on aura $R : O :: MN \times IK \times EF : MT \times IH \times ED$. C. Q. F. D.

On doit remarquer qu'il n'eſt pas néceſſaire que la puiſſance O *tire directement ſur la poulie mobile* EDF *par un cordon droit* FBO, *& que ce cordon peut être détourné par une poulie de renvoi* X *à centre fixe, pour que la puiſſance* O *puiſſe exercer plus commodément ſa force. Car les tenſions des deux parties* FB, ZO *de la corde* FBZO *qui embraſſera la poulie dont le centre* L *eſt fixe, ſeront égales, & la poulie fixe* X *n'aura point d'autre propriété que celle de permettre à la puiſſance* O *d'agir ſuivant la direction qui lui convient le mieux.*

Quoiqu'on

Quoiqu'on n'ait mis que trois poulies mobiles dans les Figures de ce Théorème, il est évident qu'on en pourra employer autant qu'on voudra, & qu'en se servant de la même démonstration, l'on prouvera toûjours que

Le poids *R* appliqué à la chape de la poulie mobile la plus basse,

Est à la puissance *O* appliquée au bout de la corde qui embrasse la poulie la plus haute;

Comme le produit des soûtendantes de tous les arcs enveloppés par les cordes,

Est au produit des rayons de toutes les poulies mobiles.

COROLLAIRE I.

388. Si les cordons tangens de toutes les poulies sont parallèles, les soûtendantes *MN*, *IK*, *EF* des arcs enveloppés seront des diamètres; ainsi chacune d'elles vaudra deux rayons de sa poulie; c'est-à-dire Fig. 86.

qu'on aura $\begin{cases} MN : MT :: 2 : 1 \\ IK : IH :: 2 : 1 \\ EF : ED :: 2 : 1. \end{cases}$

Cela posé, les poulies $\begin{Bmatrix} MTN \\ IHK \\ EDF \end{Bmatrix}$ donneront $\begin{cases} R : Q :: 2 : 1 \\ Q : G :: 2 : 1 \\ G : O :: 2 : 1. \end{cases}$

Donc en multipliant toutes ces proportions par ordre, on aura $R : O :: 2 \times 2 \times 2 : 1$;

C'est-à-dire que la puissance *R* est à la puissance *O*, comme le nombre 2 élevé à une puissance d'un degré égal au nombre des poulies mobiles, est à l'unité.

Par exemple, dans la Figure 86 où il y a trois poulies mobiles, on aura $R : O :: \overline{2}^3 : 1$; c'est-à-dire, comme le cube de 2, ou comme 8 est à l'unité.

COROLLAIRE. II.

Fig. 85. 389. Dans le cas où les cordons des poulies ne feront pas parallèles,

les poulies $\left\{\begin{matrix} MTN \\ IHK \\ EDF \end{matrix}\right\}$ donneront (n°. 383) $\left\{\begin{matrix} R : \rho :: S.\, PA\rho : S.\, \frac{1}{2} PA\rho, \\ \rho : G :: S.\, S\rho G : S.\, \frac{1}{2} S\rho G, \\ G : O :: S.\, VGB : S.\, \frac{1}{2} VGB. \end{matrix}\right.$

Ainsi en multipliant toutes ces proportions par ordre, on aura

$$R : O :: S.\, PA\rho \times S.\, S\rho G \times S.\, VGB : S.\, \tfrac{1}{2} PA\rho \times S.\, \tfrac{1}{2} S\rho G \times S.\, \tfrac{1}{2} VGB.$$

C'eſt-à-dire que la puiſſance *R* appliquée à la chape de la premiere poulie, eſt à la puiſſance *O* appliquée à l'extrémité de la corde qui embraſſe la dernière poulie mobile; comme le produit des ſinus de tous les angles compris entre les cordons qui touchent les poulies mobiles, eſt au produit des ſinus des moitiés des mêmes angles.

THÉOREME.

Fig. 87. 390. *Soient tant de poulies fixes* A, B, C, D *&* *tant de poulies mobiles* MLN, KIH, GFE *qu'on voudra, embraſſées par une ſeule corde* PπOMNVKKHYZGEWρQ *tirée à ſes extrémités par deux puiſſances* P, Q *en équilibre.*

1°. *Les deux puiſſances* P, Q *ſeront égales, & la tenſion de chaque partie de la corde ſera égale à la puiſſance* P *ou* Q.

2°. *Si les charges des poulies mobiles ſont repréſentées par des poids* R, S, T, *& qu'on tire dans les poulies mobiles les ſoûtendantes* MN, KH, GE *des arcs enveloppés par la corde, avec des rayons aux extrémités de ces arcs, on trouvera que*

La puissance *P*, ou son égale Q, ou la tension de chaque partie de la corde,

Est au poids *R*, ou *S*, ou *T*;

Comme le rayon de la poulie mobile qui porte ce poids *R*, ou *S*, ou *T*,

Est à la soûtendante de l'arc enveloppé de la même poulie.

C'est-à-dire qu'on aura toutes ces proportions

P:R::ML:MN, P:S::KI:KH, P:T::GF:GE.

3°. *On aura* { R:S::MN×KI:KH×MN
R:T::MN×GF:GE×ML
S:T::KH×GF:GE×KI.

DÉMONSTRATION.

On a démontré (*n*°. 383) que, pour l'équilibre dans les poulies, les deux bouts de la corde qui embrasse la roue, doivent être tirés par des puissances égales. Ainsi les deux parties de corde qui touchent une même roue doivent être tendues également.

Suivant ce principe, 1°. les deux parties *P x*, *O M* de la corde qui embrasse la poulie *A*, sont tendues également. 2°. Les deux parties *O M*, *V N* de la corde qui embrasse la poulie *M L N*, sont aussi tendues également. 3°. Les deux parties *V N*, *X K* de la corde qui embrasse la poulie fixe *B*, sont tendues avec la même force. 4°. Les deux parties *X K*, *Y H* de la corde qui embrasse la poulie mobile *K I H*, ont la même tension. Il en sera de même des autres parties de la même corde qui embrassera d'autres poulies.

Ainsi, en nommant P la force avec laquelle la corde est tirée à son extrémité P, il faudra nommer aussi P chacune des forces avec lesquelles les différentes parties de la même corde seront tendues ; & l'on pourra imaginer qu'une puissance P est appliquée à chacune des parties de cette corde : en sorte que la puissance Q sera égale à la puissance P. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Puisque la tension de chaque partie de la corde peut être représentée par P,

les poulies $\left\{\begin{matrix} MLN \\ KIH \\ GFE \end{matrix}\right\}$ donneront (n°. 385) $\left\{\begin{matrix} P : R :: ML : MN \\ P : S :: KI : KH \\ P : T :: GF : GE \end{matrix}\right\}$.

C. Q. F. 2°. *D.*

3°. Puisqu'on vient de trouver $\left\{\begin{matrix} R : P :: MN : ML, \\ P : S :: KI : KH, \\ P : T :: GF : GE \\ \text{ou } T : P :: GE : GF; \end{matrix}\right.$

si l'on multiplie par ordre ces proportions deux à deux,

la 1re & la 2de donneront $R : S :: MN \times KI : KH \times ML$
la 1re & la 3me donneront $R : T :: MN \times GF : GE \times ML$
la 2de & la 4me donneront $\left\{\begin{matrix} T : S :: GE \times KI : KH \times GF \\ \text{ou } S : T :: KH \times GF : GE \times KI \end{matrix}\right.$
C. Q. F. 3°. *D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 87. 391. Si toutes les poulies ont des rayons égaux, c'est-à-dire si $ML = KI = GF$,

les trois proportions $\left\{\begin{matrix} R : S :: MN \times KI : KH \times ML \\ R : T :: MN \times GF : GE \times ML \\ S : T :: KH \times GF : GE \times KI \end{matrix}\right\}$ deviendront $\left\{\begin{matrix} R : S :: MN : KH \\ R : T :: MN : GE \\ S : T :: KH : GE. \end{matrix}\right.$

Et comme chacune des forces R, S, T est représentée par la même ligne dans ces proportions, on

aura $R : S : T :: MN : KH : GE$; c'est-à-dire que les poids appliqués aux chapes de plusieurs poulies égales séparément mobiles embrassées avec des poulies fixes par une même corde, sont proportionnels aux soûtendantes des arcs de leurs poulies embrassés par la corde.

COROLLAIRE II.

392. Si les soûtendantes MN, KH, GE des arcs enveloppés par la corde dans les poulies mobiles, partagent les roues des poulies en segmens semblables, les triangles MLN, KIH, GFE seront semblables & donneront $MN : ML :: KH : KI :: GE : GF$. Ainsi l'on aura $MN \times KI = KH \times ML$, & $MN \times GF = GE \times ML$. Fig. 87.

Mais (n°. 390) $\begin{cases} R : S :: MN \times KI : KH \times ML \\ R : T :: MN \times GF : GE \times ML. \end{cases}$

Donc, puisque les deux derniers termes de chacune de ces proportions sont égaux, les premiers le seront aussi; c'est-à-dire que les puissances R, S, T appliquées aux chapes des poulies mobiles, seront égales.

Or lorsque toutes les soûtendantes MN, KH, GE des arcs enveloppés par la corde, partageront toutes les poulies mobiles en segmens semblables, les angles MmN, KnH, GgE que tous les cordons pris deux à deux feront entr'eux, seront égaux; & réciproquement lorsque ces angles seront égaux, toutes les poulies seront partagées en segmens semblables par les soûtendantes MN, KH, GE. Ainsi lorsque tous les angles MmN, KnH, GgE seront égaux, les puissances R, S, T appliquées aux chapes des poulies seront égales.

CHAPITRE II.

Des Moufles, & de la manière de multiplier les Forces par leur moyen.

393. On a dit (n°. 380) qu'on appelle *Moufle* l'assemblage de plusieurs poulies dans une même chape ; & que pour élever des poids avec le secours de ces machines, on emploie toûjours une moufle mobile avec une moufle immobile, dont toutes les roues sont embrassées par une seule corde.

Fig. 88 & 89. Une extrémité de la corde qui embrasse toutes les poulies, est toûjours arrêtée à la chape de l'une des moufles ; quelquefois elle est fixée à la chape immobile de la moufle supérieure ; mais on l'attache plus ordinairement à la chape de la moufle inférieure qui doit être élevée avec le poids.

Quoique les moufles soient toûjours pesantes, on les considère sans pesanteur ; mais on comprend celle de la moufle inférieure dans le poids *R* dont elle est chargée ; c'est-à-dire que *R* représente la somme faite du poids de la moufle mobile & du poids particulier appliqué à la chape de cette moufle.

A l'égard du poids de la moufle fixe ou supérieure, on ne le considère jamais ; parce qu'elle est soûtenue par un point fixe dont il est peu important de connoître la charge, & que dans les moufles on ne demande que le rapport du poids *R* à la puissance *P* qui le soûtient.

S'il arrivoit qu'on demandât la charge du point fixe *E* qui soûtient tout le systême, il faudroit non-

seulement avoir égard à la pesanteur de la moufle inférieure & du corps *R* appliqué à sa chape, mais encore à celle de la moufle supérieure. Mais cette considération ne regarderoit point la théorie des moufles : elle se rapporteroit à la machine funiculaire; & l'on trouveroit que la résultante de la puissance *P* & de la pesanteur du système composé des deux moufles & du poids *R*, passeroit par le crochet *B* qui porte tout le système.

THÉOREME.

394. *Soient deux moufles* ABC, HLS, *l'une fixe, l'autre mobile & chargée d'un poids* R, *composées toutes deux d'un même nombre de poulies embrassées par une seule corde dont une extrémité soit arrêtée à la chape de la moufle supérieure, & l'autre extrémité soit tirée par une puissance* P *en équilibre avec le poids* R *dans lequel on comprend la pesanteur de la moufle mobile. Si dans les poulies de la moufle mobile on mène les soûtendantes* GI, MN, VT *des arcs embrassés par la corde, avec des rayons aux extrémités des mêmes arcs; on aura, dans le cas où toutes les soûtendantes* GI, MN, VT *seront horizontales,* Fig. 88.

$$R : P :: \left\{ \begin{array}{c} GI \times ML \times VS \\ + MN \times GH \times VS \\ + VT \times GH \times ML \end{array} \right\} : GH \times ML \times VS;$$

c'est-à-dire que le poids R *sera à la puissance* P, *comme la somme des produits faits de la soûtendante de chaque poulie de la moufle mobile, multipliée par le produit des rayons des autres poulies de cette moufle, est au produit de tous les rayons des poulies de la même moufle.*

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les cordons tangens des poulies de la moufle mobile, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent deux à deux en K, O, Q; & de ces points de rencontre soient menées aux centres des mêmes poulies les droites KH, OL, QS : ces droites seront perpendiculaires aux soûtendantes GI, MN, VT que l'on suppose horizontales, & seront par conséquent verticales.

Mais les forces résultantes de celles des cordons appliqués deux à deux aux poulies H, L, K, passent nécessairement par les points K, O, Q où concourent ces cordons, & par les centres H, L, S des poulies qui soûtiennent la chape GT chargée du poids R. Ainsi ces forces résultantes que nous nommerons K, O, Q, seront dirigées suivant les verticales KH, OL, QS, & par conséquent la force unique résultante de toutes ces résultantes particulieres sera aussi verticale & égale à leur somme $K+O+Q$. Et comme cette résultante unique soûtient la pesanteur du systême de la moufle mobile & du poids R, & lui est par conséquent égale; si l'on nomme R la pesanteur de ce systême, on aura $R=K+O+Q$.

Les charges des centres des poulies de la moufle mobile étant égales aux résultantes K, O, Q des forces des cordons appliqués deux à deux à ces poulies, & chacune de ces poulies pouvant être considérée indépendamment du reste de la moufle; la tension de la corde qui embrassera chaque poulie, sera (n°. 385) à la charge K, ou O, ou Q, comme le rayon de cette poulie, sera à la soûtendante de

son arc enveloppé par la corde : & comme toutes les parties de la corde seront tendues (n°. 390) avec des forces égales à la puissance P, il est évident que

les poulies $\left\{\begin{matrix} GHI \\ MLN \\ VST \end{matrix}\right\}$ donneront $\left\{\begin{matrix} P:K::GH:GI. \\ P:O::ML:MN. \\ P:Q::VS:VT. \end{matrix}\right.$

Comme les rayons ou troisièmes termes GH, ML, VS qui sont relatifs à la même puissance P dans ces trois proportions, ne sont pas égaux, on multipliera les deux derniers termes de chacune d'elles par le produit des troisièmes termes de toutes les autres, ce qui ne troublera pas l'égalité des rapports de ces proportions ; & l'on aura

$$P:K::GH\times ML\times VS:GI\times ML\times VS.$$
$$P:O::ML\times GH\times VS:MN\times GH\times VS.$$
$$P:Q::VS\times GH\times ML:VT\times GH\times ML.$$

Or toutes ces proportions ont les mêmes antécédens, puisqu'elles commencent toutes par P, & que leurs troisièmes termes sont composés de la multiplication des trois rayons GH, ML, VS. Ainsi (*Géom. n°.* 208) l'on en peut faire cette suite de rapports égaux

$$P:K:O:Q::GH\times ML\times VS:GI\times ML\times VS:MN\times GH\times VS:VT\times GH\times ML.$$

d'où on conclurra (*Géom. n°.* 216) & *alternando*

$$K+O+Q \text{ ou } R:P::\left\{\begin{matrix} GI\times ML\times VS \\ +MN\times GH\times VS \\ +VT\times GH\times ML \end{matrix}\right\}:GH\times ML\times VS.$$

C. Q. F. D.

On doit remarquer que le rapport qu'on vient de démontrer entre le poids R *& la puissance* P, *n'a lieu*

que dans le cas où les soûtendantes GI, MN, VT *sont horizontales ; ce cas étant une des conditions expresses de l'énoncé du Théorème. Car si les soûtendantes* GI, MN, VT *n'étoient point horizontales, les directions des charges des poulies* GHI, MLN, VST *qui sont toûjours perpendiculaires à ces soûtendantes, ne seroient pas verticales. Ainsi ces charges qu'on a nommées* K, O, Q *ne seroient point les parties du poids* R ; *c'est-à-dire qu'on n'auroit pas* R = K + O + Q, *& que le poids* R *seroit seulement la résultante des charges* K, O, Q *des poulies* GHI, MLN, VST.

COROLLAIRE I.

Fig. 88. 395. Les soûtendantes GI, MN, VT des arcs enveloppés par la corde dans la moufle mobile, étant toûjours supposées horizontales ; si toutes les poulies de cette moufle ont des rayons égaux, les deux derniers termes de la proportion précédente

$$R : P :: \left\{ \begin{array}{l} GI \times ML \times VS \\ + MN \times GH \times VS \\ + VT \times GH \times ML \end{array} \right\} : GH \times ML \times VS$$

pourront être divisés par des produits égaux dont chacun sera composé de la multiplication de deux rayons ; ce qui changera cette proportion en celle-ci $R : P :: GI + MN + VT : GH$ ou ML ou VS : c'est-à-dire que le poids R sera à la puissance P appliquée à la corde, comme la somme des soûtendantes des arcs enveloppés par la corde dans la moufle mobile, est au rayon de l'une des poulies de cette moufle.

COROLLAIRE II.

Fig. 88. 396. Les soûtendantes GI, MN, VT des arcs

enveloppés par la corde dans la moufle mobile, étant encore supposées horizontales; si elles divisent toutes les poulies de cette moufle en segmens semblables, la proportion qu'on a démontrée dans le Théorême se réduira à celle-ci $R : P :: 3\ GI : GH$ ou $:: 3\ MN : ML$ ou $:: 3\ VT : VS$, dans le cas où il n'y aura que trois poulies dans la moufle mobile; c'est-à-dire que le poids R sera à la puissance P, comme la soûtendante de l'arc enveloppé de quelqu'une des poulies de la moufle mobile, prise autant de fois qu'il y aura de poulies dans cette moufle, sera au rayon de cette poulie.

Car puisque les soûtendantes GI, MN, VT partagent les poulies de la moufle mobile en segmens semblables, les triangles GHI, MLN, VST seront semblables & donneront $GI : GH :: MN : ML :: VT : VS$; d'où l'on tirera $GI \times ML = GH \times MN$, & $VT \times ML = MN \times VS$. Ainsi la proportion

$$R : P :: \left\{ \begin{array}{l} GI \times ML \times VS \\ + MN \times GH \times VS \\ + VT \times GH \times ML \end{array} \right\} : GH \times ML \times VS.$$

deviendra

$$R : P :: \left\{ \begin{array}{l} GH \times MN \times VS \\ + MN \times GH \times VS \\ + GH \times MN \times VS \end{array} \right\} : GH \times ML \times VS.$$

Ainsi en divisant les deux derniers termes de cette proportion par le produit $GH \times VS$, on aura $R : P :: MN + MN + MN : ML$ ou $:: 3\ MN : ML$, ou (puisqu'on suppose $MN : ML :: GI : GH :: VT : VS$) $:: 3\ GI : GH$ ou $:: 3\ VT : VS$.

397. *Il auroit été plus facile de démontrer direc-*

tement la proposition de ce Corollaire, que de la tirer de la proportion démontrée dans le Théorème. Car en nommant K, O, Q *les trois parties du poids* R *qui sont portées par les centres des poulies* GHI, MLN, VST *dans lesquelles on trouve ces raisons égales* GI : GH : : MN : ML : : VT : VS, *les*

poulies	GHI	*donne-ront*	K : P : : GI : GH
	MLN		O : P : : MN : ML *ou* : : GI : GH
	VST		Q : P : : VT : VS *ou* : : GI : GH.

Et comme la puissance P *est représentée par la même ligne* GH *dans toutes ces proportions, chacune des parties* K, O, Q *du poids* R *sera représentée par* GI; *ainsi ces trois parties du poids* R *seront égales, & leur somme* K + O + Q, *ou le poids* R, *sera représentée par* 3 GI, *en exprimant la puissance* P *par* GH. *On aura donc* R : P : : 3 GI : GH.

COROLLAIRE III.

Fig. 88. 398. Mais lorsque les angles *GKI*, *MON*, *VQT* compris entre les directions des cordons tangens des poulies, seront égaux, les soûtendantes *GI*, *MN*, *VT* des poulies de la moufle mobile partageront ces poulies en segmens semblables. Ainsi (*n°.* 397) lorsque tous les angles *GKI*, *MON*, *VQT* seront égaux, les parties *K*, *O*, *Q* du poids *R* portées par les poulies *GHI*, *MLN*, *VST* seront égales, & l'on aura *R* : *P* : : 3 *GI* : *GH* ou : : 3 *MN* : *ML* ou : : 3 *VT* : *VS*, dans le cas où il y aura trois poulies dans la moufle mobile; c'est-à-dire qu'on aura le poids *R* à la puissance *P*, comme la soûtendante d'une poulie quelconque de la moufle mobile, multipliée par le nombre des poulies de cette moufle, est au rayon de cette poulie.

COROLLAIRE IV.

399. Si les parties de la corde qui embrasse toutes les poulies des deux mouſles, ſont toutes parallèles entr'elles (on dit *toutes parallèles entr'elles*, parce qu'il ne ſuffit pas, pour la concluſion qu'on en veut tirer, que toutes ces parties de corde ſoient parallèles deux à deux); le poids R ſera à la puiſſance P, comme le double du nombre des poulies de la moufle mobile ſera à l'unité. Fig. 90.

Car tous les cordons étant parallèles, les ſoûtendantes GI, MN, VT feront des diamètres qui partageront les poulies de la moufle mobile en parties égales, & par conſéquent en ſegmens ſemblables. Ainſi dans le cas où il y aura trois poulies dans la moufle mobile, on aura $R:P::3\,GI:GH$ ou (parce que $GI=2\,GH$) $::6\,GH:GH$ ou $::6:1$; c'eſt-à-dire que le poids P ſera à la puiſſance R, comme le double du nombre des poulies de la moufle mobile ſera à l'unité.

Il eſt aiſé de démontrer la propoſition de ce Corollaire, ſans avoir recours à aucun des Corollaires précédens. Car une extrémité de la corde qui embraſſe toutes les poulies, étant attachée à la mouſle ſupérieure, il y a deux fois autant de cordons employés à ſoûtenir la mouſle inférieure, qu'il y a de poulies dans ſa chape : & comme tous ces cordons, qu'on ſuppoſe parallèles, ſont tendus avec des forces égales à celle de la puiſſance P, *on peut imaginer que le ſyſtème de la mouſle inférieure & du poids* R, *eſt ſoûtenu par deux fois autant de puiſſances égales & parallèles entr'elles, qu'il y a de poulies dans la mouſle mobile. La ſomme ou la réſultante de toutes*

ces puissances, qui se trouvera égale au poids R, *sera donc à chacune d'elles, c'est-à-dire à la puissance* P, *comme le double du nombre des poulies de la moufle mobile, sera à l'unité.*

THÉOREME.

Fig. 89. 400. *Soit une moufle fixe composée de tant de poulies* A, B, C, D, &c. *qu'on voudra, assemblées dans une même chape soûtenue par un point fixe* E; *soit aussi une moufle mobile dans la chape de laquelle il y ait une poulie de moins que dans celle de la moufle fixe, & que la chape de cette seconde moufle porte un poids* R *soûtenu en équilibre par une puissance* P, *au moyen d'une corde qui embrasse toutes les poulies des deux moufles, & dont une extrémité* X *soit arrêtée à la chape de la moufle mobile, pendant que l'autre extrémité est tirée par la puissance* P.

Si les soûtendantes GI, MN, VT *de tous les arcs de poulies embrassés par la corde dans la moufle mobile, sont horizontales, c'est-à-dire perpendiculaires à la direction du poids* R; *la dernière partie* DX *de la corde qui se terminera à la chape de la moufle mobile, sera verticale, c'est-à-dire parallèle à la direction du poids* R.

DÉMONSTRATION.

On a vû dans la démonstration du Théorème précédent, que les forces résultantes de celles des cordons appliqués deux à deux aux poulies de la moufle mobile, feront perpendiculaires aux soûtendantes *GI*, *MN*, *VT*, qu'on suppose horizontales, & seront par conséquent verticales; ainsi la direction de l'effort du dernier cordon *DX*, ou la direction

de ce cordon lui-même, doit être aussi verticale. Car si la direction de ce dernier cordon *DX* n'étoit pas verticale ; lorsque l'on composeroit sa force avec les forces verticales qui résultent aux centres des poulies de la moufle mobile, il n'en résulteroit point une force composée verticale, ou telle qu'elle doit être pour soûtenir le poids *R*. Donc la dernière partie *DX* de la corde est verticale. *C. Q. F. D.*

THÉOREME.

401. *Soient, comme dans le Théorème précédent, deux moufles, l'une fixe, l'autre mobile & chargée d'un poids* R, *dont toutes les poulies soient embrassées par une seule corde attachée par son extrémité* X *à la chape de la moufle inférieure, & tirée à son autre extrémité par une puissance* P *en équilibre avec le poids* R. Fig. 293

Si dans les poulies de la moufle mobile on mène les soûtendantes GI, MN, VT *des arcs enveloppés par la corde, avec des rayons aux extrémités des mêmes arcs ; on aura, dans le cas où toutes les soûtendantes* GI, MN, VT *seront horizontales,*

$$R : P :: \left\{ \begin{array}{c} GI \times ML \times VS \\ + MN \times GH \times VS \\ + VT \times GH \times ML \\ + GH \times ML \times VS \end{array} \right\} : GH \times ML \times VS ;$$

c'est-à-dire que le poids R *sera à la puissance* P, *comme la somme des produits faits de la soûtendante de chaque poulie de la moufle mobile, multipliée par le produit des rayons des autres poulies de cette moufle, plus le produit des rayons de toutes les poulies de la même moufle, sera au produit de tous les rayons de cette moufle.*

Démonstration.

Les soûtendantes GI, MN, VT des poulies de la moufle mobile, étant toutes horizontales, la direction du dernier cordon DX sera verticale (n°. 400); & les forces composées qui chargeront les centres H, L, S des poulies de la moufle mobile, seront verticales aussi bien que la force du dernier cordon DX dont la tension, de même que celle de tous les autres cordons, sera égale à la puissance P. Ainsi en représentant par K, O, Q, P les forces avec lesquelles les centres des poulies de la moufle mobile & le cordon DX seront chargés, on aura $K + O + Q + P = R$.

Mais (n°. 394) on trouvera

$$K + O + Q : P :: \left\{ \begin{array}{l} GI \times ML \times VS \\ + MN \times GH \times VS \\ + VT \times GH \times ML \end{array} \right\} : GH \times ML \times VS.$$

Donc on aura *componendo*

$$K + O + Q + P \text{ ou } R : P :: \left\{ \begin{array}{l} GI \times ML \times VS \\ + MN \times GH \times VS \\ + VT \times GH \times ML \\ + GH \times ML \times VS \end{array} \right\} : GH \times ML \times VS.$$

C. Q. F. D.

Corollaire I.

Fig. 89. 402. Si les rayons GH, ML, VS des poulies de la moufle mobile, sont égaux, les deux derniers termes de la proportion qu'on a démontrée dans le Théorème, pourront être divisés par des produits égaux composés de la multiplication de deux rayons; & l'on aura $R : P :: GI + MN + VT + GH : GH$; c'est-à-dire que le poids R sera à la puissance P, comme

comme la somme des soûtendantes des arcs embrassés par la corde plus un rayon, sera à un rayon.

COROLLAIRE II.

403. Si les soûtendantes GI, MN, VT des arcs embrassés par la corde dans la moufle mobile, divisent toutes les poulies de cette moufle en segmens semblables; la proportion qu'on a démontrée dans le Théorème (n°. 401) se réduira à celle-ci $R:P::3\,GI+GH:GH$ ou $::3\,MN+ML:ML$ ou $::3\,VT+VS:VS$, dans le cas où il n'y aura que trois poulies dans la moufle mobile; c'est-à-dire que le poids R sera à la puissance P, comme la soûtendante de l'arc enveloppé de quelqu'une des poulies de la moufle mobile, prise autant de fois qu'il y aura de poulies dans cette moufle, plus le rayon de cette poulie, sera au rayon de la même poulie. Fig. 89.

Car dans le cas où la moufle mobile HLS ne contiendra que trois poulies, on aura (n° 397) $K+O+Q:P::3\,GI:GH$ ou $::3\,MN:ML$ ou $::3\,VT:VS$. Ainsi l'on trouvera *componendo* $K+O+Q+P$ ou $R:P::3\,GI+GH:GH$ ou $::3\,MN+ML:ML$ ou $::3\,VT+VS:VS$; c'est-à-dire que le poids R sera à la puissance P, comme la soûtendante d'une poulie quelconque de la moufle mobile, prise autant de fois qu'il y aura de poulies dans cette moufle, plus un rayon de cette poulie, sera au rayon de la même poulie.

COROLLAIRE III.

404. Mais lorsque les angles GKI, MON, VQT compris entre les directions des cordons tangens des poulies, seront égaux, les soûtendantes GI, MN, VT Fig. 89.

des poulies de la moufle mobile partageront ces poulies en segmens semblables. Ainsi dans le cas où les angles *GKI*, *MON*, *VQT* seront égaux, le poids *R* & la puissance *P* seront dans le rapport qu'on a démontré au Corollaire précédent.

COROLLAIRE IV.

Fig. 91. 405. Si toutes les parties de la corde sont paralleles entr'elles, le poids *R* sera à la puissance *P*, comme le double du nombre des poulies de la moufle mobile plus l'unité, sera à l'unité; c'est-à-dire que dans le cas où il n'y aura que trois poulies dans la moufle mobile, on aura *R* : *P* : : 7 : 1.

Il est aisé de déduire cette proposition du Corollaire II; mais il est encore plus facile de la démontrer directement. Car une extrémité de la corde qui embrasse toutes les poulies, étant attachée à la chape de la moufle inférieure, il y aura deux fois autant de cordons plus un employés à soûtenir cette moufle, qu'il y aura de poulies dans sa chape : & comme chaque cordon portera une partie du poids *R* égale à la puissance *P*, il est clair que le poids *R* ou la somme de toutes les parties que les cordons de la moufle porteront, sera à la puissance *P*, comme le double du nombre des poulies contenues dans la moufle mobile plus l'unité, sera à l'unité.

THÉOREME.

Fig. 96. 406. *Soient comme dans le Théorème précédent, deux moufles, l'une fixe, & l'autre mobile chargée d'un poids* R, *dont toutes les poulies soient embrassées par une seule corde attachée par son extrémité* X *à la chape*

de la moufle inférieure, & tirée à son autre extrémité par une puissance P en équilibre avec le poids R.

Si l'on prend sur tous les cordons compris entre les deux moufles des parties égales IG, WF, TM, VN, YK, ZQ, XO *pour représenter les forces égales avec lesquelles ces cordons sont tendus, & que par les points* I, W, T, V, Y, Z, X *on mène des verticales* Ig, Wf, Tm, Vn, Yk, Zq, Xo *qui soient terminées par des horizontales* Gg, Ff, Mm, Nn, Kk, Qq, Oo; *on aura dans tous les cas la proportion suivante* R : P :: Ig + Wf + Tm + Vn + Yk + Zq + Xo : IG.

DÉMONSTRATION.

Soient achevés les parallélogrammes *gi*, *fr*, *mt*, *nu*, *ky*, *qz*, *ox* : l'effort de chacun des cordons compris entre les deux moufles, se décomposera en deux forces représentées par les côtés contigus du parallélogramme dont la diagonale représentera cet effort ; c'est-à-dire que la force du cordon *IG* représentée par la diagonale *IG* du parallélogramme *gi*, se décomposera en deux forces représentées par les côtés *Ig*, *Ii* dont l'un sera vertical & l'autre horizontal. La force du cordon *WF* exprimée par la diagonale *WF* du parallélogramme *fr*, se décomposera en deux forces représentées par les côtés *Wf*, *Wr* dont l'un sera vertical & l'autre horizontal : & ainsi des autres.

Les efforts de tous les cordons compris entre les deux moufles, seront donc décomposés en deux sortes de forces, les unes verticales représentées par *Ig*, *Wf*, *Tm*, *Vn*, *Yk*, *Zq*, *Xo*, les autres horizontales & représentées par *Ii*, *Wr*, *Tt*, *Vu*, *Yy*, *Zz*, *Xx*.

Mais les forces horizontales *Ii*, *Wr*, *Tt*, *Vu*, *Yy*, *Zz*, *Xx* ne contribuent en rien au soûtien de la

moufle mobile chargée du poids *R*, & ne servent qu'à ranger & maintenir cette moufle dans la position où elle doit être par rapport à la moufle fixe, & relativement à la disposition des cordons contenus entres les deux moufles.

Donc les efforts verticaux *Ig*, *Wf*, *Tm*, *Vn*, *Yk*, *Zq*, *Xo*, sont les seuls qui soûtiennent le systême de la moufle mobile & du poids qui lui est appliqué. Ainsi la somme de toutes ces forces verticales sera égale au poids *R* dans lequel on comprend celui de la moufle mobile : & comme la puissance *P* a été représentée par *GI* ou *WF* &c. on aura toûjours $R : P :: Ig + Wf + Tm + Vn + Yk + Zq + Xo : IG$. C. Q. F. D.

A l'égard des forces horizontales représentées par Ii, Wr, Tt, Vu, Yy, Zz, Xx; *lorsqu'elles ont rangé la moufle dans la situation où elle doit être pour l'équilibre, elles se détruisent nécessairement. Ainsi la somme* Ii + Vu + Yy + Xx *des forces qui tirent d'un même côté, est égale à la somme* Wr + Tt + Zz *de celles qui tirent de l'autre côté. Car si ces deux sommes de forces horizontales n'étoient pas égales, l'une l'emporteroit sur l'autre & dérangeroit la moufle; ainsi la moufle ne seroit pas immobile, & il n'y auroit pas d'équilibre : ce qui seroit contre l'hypothèse.*

On doit observer ici que les verticales Ig, Wf, Tm, Vn, Yk, Zq, Xo *sont les sublimités des forces égales des cordons, qui ont été représentées par les parties égales* IG, WF, TM, VN, YK, ZQ, XO *des mêmes cordons. Nous aurions donc pû dire que le poids* R *est à la puissance* P *avec laquelle il est en équilibre, comme la somme des sublimités des forces des cordons compris entre les deux moufles, est à la ligne par*

laquelle on a représenté la force de l'un de ces cordons, ou la puissance P.

COROLLAIRE.

407. Si tous les cordons compris entre les deux moufles sont parallèles, ils seront aussi verticaux : car s'ils étoient inclinés, ils le seroient tous d'un même côté, puisqu'on les suppose parallèles ; & en décomposant leurs forces en forces verticales & forces horizontales, les horizontales tireroient toutes d'un même côté, & ne se détruiroient pas ; la moufle mobile ne garderoit donc pas sa situation, & ne seroit par conséquent pas en équilibre. Fig. 96.

Mais tous les cordons compris entre les deux moufles étant verticaux, ils se confondront avec les directions de leurs sublimités ; ainsi leurs forces seront égales à celles de leurs sublimités, & l'on pourra par conséquent prendre les proportionnelles IG, WF, TM, *&c.* des forces des cordons pour leurs sublimités Ig, Wf, Tm, *&c.* & l'on aura cette proportion $R : P :: IG + WF + TM + VN + YK + ZQ + XO : IG$.

Or toutes les lignes qui entrent dans cette proportion sont égales ; ainsi chacune d'elles pourra être représentée par l'unité, & par conséquent on aura $R : P :: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 : 1$; c'est-à-dire que le poids R sera à la puissance P, comme le nombre des cordons compris entre les deux moufles, ou plûtôt comme le nombre des cordons qui tireront contre la moufle mobile à laquelle le poids est attaché, sera à l'unité.

REMARQUE I.

408. On doit remarquer que si l'extrémité de la Fig. 96.

corde étoit attachée à la chape de la moufle supérieure immobile, comme il arriveroit si la poulie D étoit supprimée & que l'extrémité de la corde fût en *d*, il y auroit pour chaque poulie de la moufle mobile deux cordons qui tireroient sur cette moufle chargée du poids *R*; au lieu que lorsque la corde est attachée à la chape de la moufle inférieure qui est mobile, il y a pour chaque poulie de la moufle mobile deux cordons qui tirent sur cette moufle, & encore un cordon de plus attaché à cette moufle. Ainsi lorsque tous les cordons sont parallèles, & que la corde est attachée par son extrémité à la moufle immobile qui est supérieure, le poids *R* est à la puissance *P*, comme le double du nombre des poulies de la moufle mobile est à l'unité; ce que nous avons déjà dit (n°. 399).

Tous les cordons compris entre les deux moufles demeurant parallèles; si l'extrémité de la corde étoit attachée à la moufle inférieure, on auroit le poids *R* à la puissance *P* qui le soûtient en équilibre, comme le double du nombre des poulies contenues dans la moufle mobile plus l'unité, est à l'unité.

Enfin sans s'embarrasser du nombre des poulies de la moufle mobile, & sans faire deux cas particuliers de la corde attachée par son extrémité à la chape de la moufle immobile ou à celle de la moufle mobile, il suffira de compter les cordons qui tireront sur la moufle mobile; parce que dans tous les cas où les cordons seront parallèles, ce nombre de cordons sera à l'unité, comme le poids *R* sera à la puissance *P* qui le soûtiendra en équilibre.

REMARQUE II.

409. Pour rendre les cordons des moufles parallèles, on a proposé différens moyens. Fig. 90. & 91.

1°. On a proposé de mettre les centres des poulies de chaque chape dans une ligne droite, & de faire les diamètres de ces poulies en y comprenant un diamètre de la corde, en progression arithmétique dont la différence soit égale au diamètre de la plus petite poulie.

Ainsi dans les moufles où le bout de la corde qui embrasse toutes les poulies est attaché à l'extrémité *D* de la moufle immobile, on demande qu'en nommant *C*, *B*, *A* les diamètres des poulies de la moufle immobile, & *S*, *L*, *H* ceux des poulies de la moufle mobile, on ait $S : C : L : B : H : A :: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$. Fig. 90.

Et dans les moufles où le bout de la corde est arrêté à l'extrémité *X* de la moufle inférieure, on demande qu'en nommant *D*, *C*, *B*, *A* les diamètres des poulies de la moufle immobile, & *S*, *L*, *H* les diamètres des poulies de la moufle mobile, on ait $D : S : C : L : B : H : A :: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7$. Fig. 91.

Mais en construisant ainsi les moufles pour rendre les cordons parallèles, on tombe dans un défaut assez considérable, en ce que l'assemblage des deux moufles est d'un trop grand volume, & qu'il y a une ou deux poulies extrêmement petites ; ce qui fait que la corde n'a qu'un fort petit bras de levier pour faire tourner ces poulies, & pour vaincre les frottemens de leurs tourillons ou goujons : en sorte que la puissance *P* a besoin d'employer une force trop grande pour élever le poids *R* & vaincre tous les frottemens de la machine.

Fig. 92 & 93. 2°. On a proposé de faire toutes les poulies des deux moufles de même diamètre, & de traverser toutes celles de chaque moufle par un goujon commun : c'est de cette façon que sont construites la plus grande partie des moufles dont on fait usage dans les bâtimens. Dans ces espèces de moufles, les cordons ne sont pas exactement parallèles; mais leur défaut de parallélisme est trop peu considérable pour causer une erreur sensible dans le rapport qu'on a trouvé entre le poids *R* & la puissance *P*.

Il y a cependant un petit inconvénient à faire traverser par un même goujon toutes les poulies d'une même moufle, sçavoir que les trous des poulies peuvent s'agrandir irrégulièrement, ce qui peut les empêcher de tourner rondement dans leurs chapes.

Fig. 94 & 95. 3°. On a proposé de tailler toutes les poulies de chaque moufle dans une seule pièce en forme de cone tronqué : ces espèces de moufles se nomment *Fusées.* Un équipage de moufles est toûjours composé de deux fusées dont toutes les gorges sont embrassées par une même corde, & l'extrémité de cette corde peut être arrêtée à l'extrémité de la chape immobile ou à l'extrémité de la chape mobile. Pour rendre toutes les parties de la corde parallèles dans ces espéces de moufles, toutes les poulies doivent avoir leurs diamètres en progression arithmétique dont la différence soit égale au diamètre de la plus petite poulie ; c'est-à-dire que

Fig. 94. Dans le cas où l'extrémité de la corde sera attachée à la chape de la fusée supérieure ; si l'on représente par *S*, *L*, *H* les diamètres des poulies de la fusée inférieure, & par *C*, *B*, *A* les diamètres des

poulies de la fusée supérieure, il faut que l'on ait $S : C : L : B : H : A :: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$.

Dans le cas où l'extrémité de la corde sera attachée à la chape de la fusée inférieure; si l'on représente par D, C, B, A les diamètres des poulies de la fusée supérieure, & par S, L, H les diamètres des poulies de la fusée inférieure; il faut que l'on ait $D : S : C : L : B : H : A :: 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7$. Fig. 95.

Cette dernière espèce de moufle ne diffère de celle qu'on a représentée dans la figure 90 ou 91, qu'en ce que chaque poulie des moufles de la figure 90 ou 91 a son axe particulier, & que les poulies de celle qu'on vient de représenter dans la figure 94 ou 95 ont un axe commun auquel elles sont fortement arrêtées.

On doit remarquer que dans ces dernières espèces de moufles, on est obligé de faire les diamètres des poulies des fusées en progression arithmétique; non-seulement pour que les cordons se trouvent parallèles, à peu de chose près (car ils ne peuvent jamais être exactement parallèles), mais encore pour que la corde n'ait point de frottement dans les gorges des poulies qu'elle embrasse. Fig. 94. & 95.

On doit encore remarquer que dans cette dernière espèce de moufle aussi-bien que dans la première, on comprend dans le diamètre d'une poulie le diamètre de la corde par laquelle elle est embrassée; c'est-à-dire que l'on entend par le diamètre de chaque poulie embrassée par une corde, l'intervalle qui se trouve entre les axes des deux cordons qui soûtiennent cette poulie : en sorte qu'en demandant que toutes les poulies des deux moufles soient en progression arithmétique avec une différence égale au diamètre de la

plus petite poulie, on exige que tous les cordons réduits dans un même plan soient à égale distance les uns des autres.

Enfin l'on doit remarquer qu'on ne peut pas employer des cordes de toutes les grosseurs pour cette espèce de moufle ; c'est-à-dire que si deux moufles ou fusées ont été construites pour un certain diamètre de corde, elles ne pourront point servir avec le même avantage, ou sans frotter dans les gorges, en employant une corde d'un autre diamètre. Comme on ne fait point usage de ces dernières moufles ou fusées, il est inutile de détailler plus au long & de démontrer les remarques qu'on a faites à leur sujet.

PROBLEME.

Fig. 97. 410. *Un poids* R *étant appliqué à la chape d'une poulie mobile embrassée avec une seconde poulie par une corde* BLFEGP *attachée par un bout à la chape* AB *de la seconde poulie, & tirée à son autre bout par une puissance* P ; *on demande que, les diamètres des deux poulies étant donnés, on détermine la position de la chape* AB, *le point* A *où elle doit être accrochée, & le point* B *où doit être attachée la corde* BLFEGP, *pour que les deux cordons* BL, EF *soient parallèles, ou que la puissance* P *soutienne la moitié du poids* R.

SOLUTION.

Soient tirées deux verticales *BL*, *EF* distantes entr'elles d'une quantité égale au diamètre donné de la poulie dont la chape porte le poids *R* : ces deux verticales représenteront les cordons qui doivent soutenir la poulie mobile. Par un point quelconque *E* de la verticale *EF*, soit menée dans le plan des deux

verticales EF, BL une ligne horizontale EC égale au rayon donné de la poulie supérieure : le point C sera la place du centre de cette poulie. Enfin du point C comme centre & du rayon CE, on décrira une circonférence qui représentera la poulie supérieure.

Par le centre D du cercle qui représente la poulie inférieure, soit élevée une verticale DG qui rencontre en quelque point G la direction quelconque GP qu'on voudra donner à la puissance P, & qui sera nécessairement une tangente de la poulie supérieure : la ligne GP, sera la direction de la force du poids R, & le point G pourra être considéré comme le seul point du système de la poulie supérieure, qui soit tiré par le poids R & par la puissance P.

Du point G soient pris sur les directions GD, GP du poids R & de la puissance P, deux parties GH, GK qui soient entr'elles comme 2 est à 1, c'est-à-dire comme le poids R doit être à la puissance P; & ayant achevé le parallélogramme $GHIK$, soit tirée sa diagonale GI : cette diagonale représentera la force résultante du poids R & de la puissance P, ou la force totale avec laquelle le point G du système de la poulie supérieure est tiré par les deux forces R, P. Ainsi le crochet A qui doit soûtenir la chape de la poulie supérieure doit être placé en quelque point de la direction de la diagonale GI; & par conséquent, si par un point A quelconque de cette diagonale prolongée, s'il est nécessaire, & par le centre C de la poulie supérieure, on mène une droite ACB jusqu'à ce qu'elle rencontre en quelque point B la verticale BL; cette droite ACB représentera la longueur & la position que peut avoir la

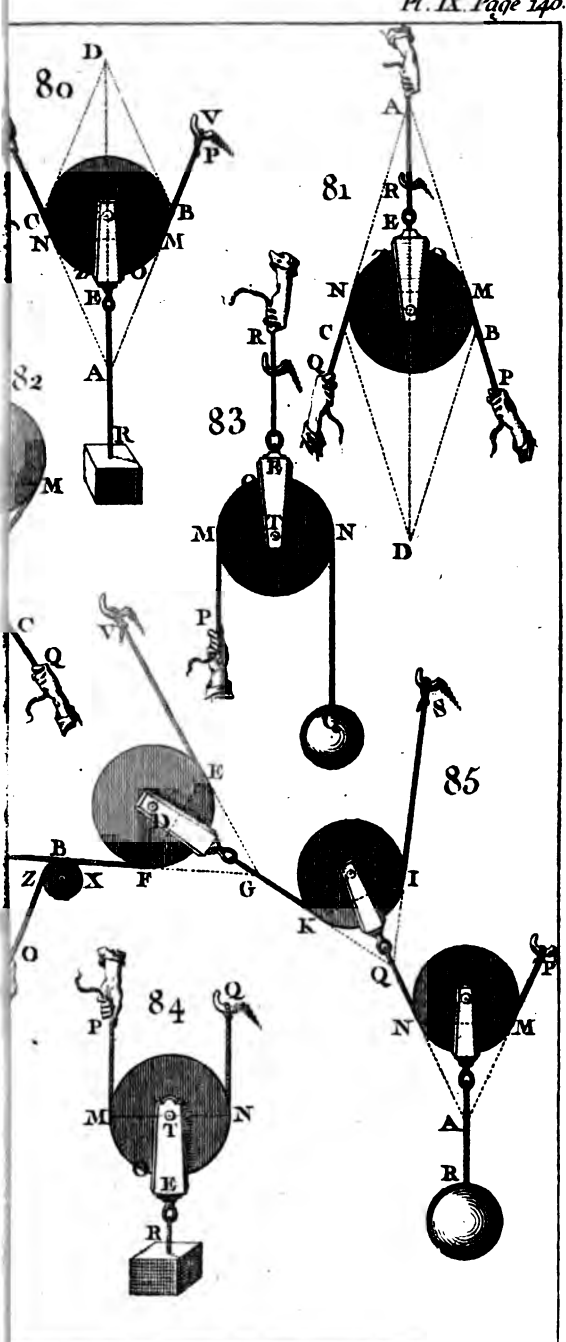
chape; le point *A* représentera le crochet qui doit soûtenir cette chape ou tout le système; & le point *B* sera celui par lequel la corde *BLFEGP* doit être arrêtée à la même chape. C. Q. F. T.

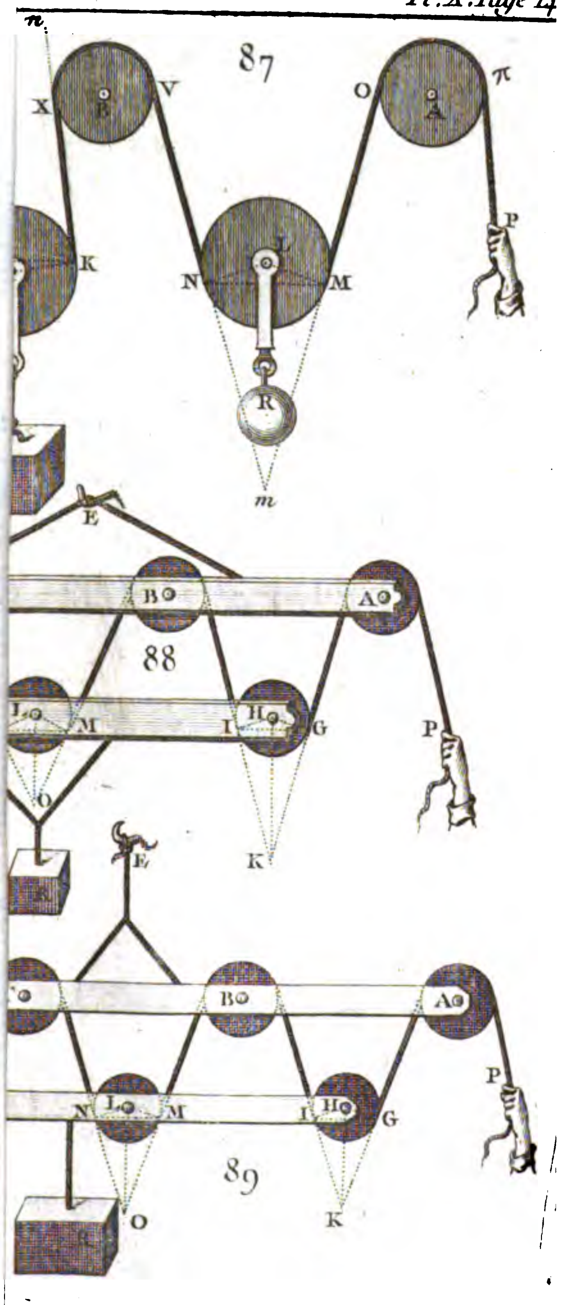
REMARQUE.

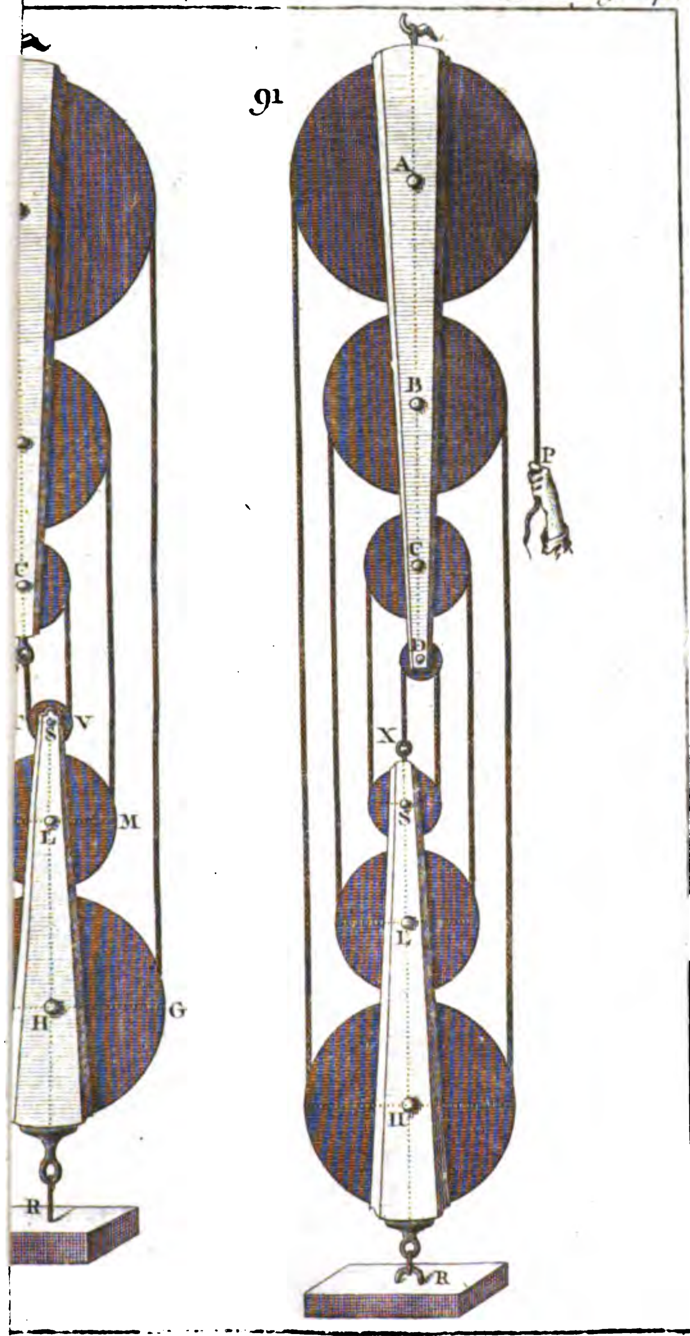
Comme la droite *AB* qui représente la longueur & la situation de la chape de la poulie supérieure, n'a point d'autre condition que de passer par le point *C* & par un point quelconque *A* de la diagonale *GI* ou de son prolongement; il est évident qu'une infinité de chapes de différentes longueurs & différemment placées, peuvent donner la solution du Problème proposé.

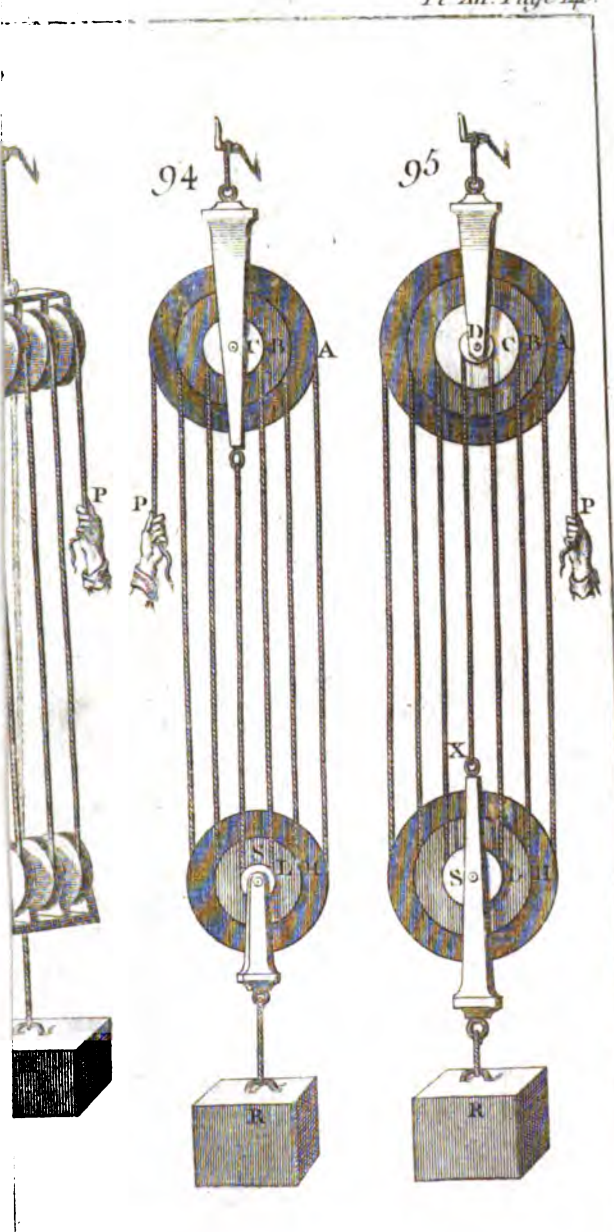
On doit remarquer que dans la solution de ce Problème, on a considéré la poulie supérieure sans pesanteur; mais la solution n'auroit guère été plus difficile, si l'on avoit regardé la poulie supérieure comme pesante. A l'égard de la poulie inférieure, on comprend sa pesanteur avec celle du poids *R* appliqué à sa chape.

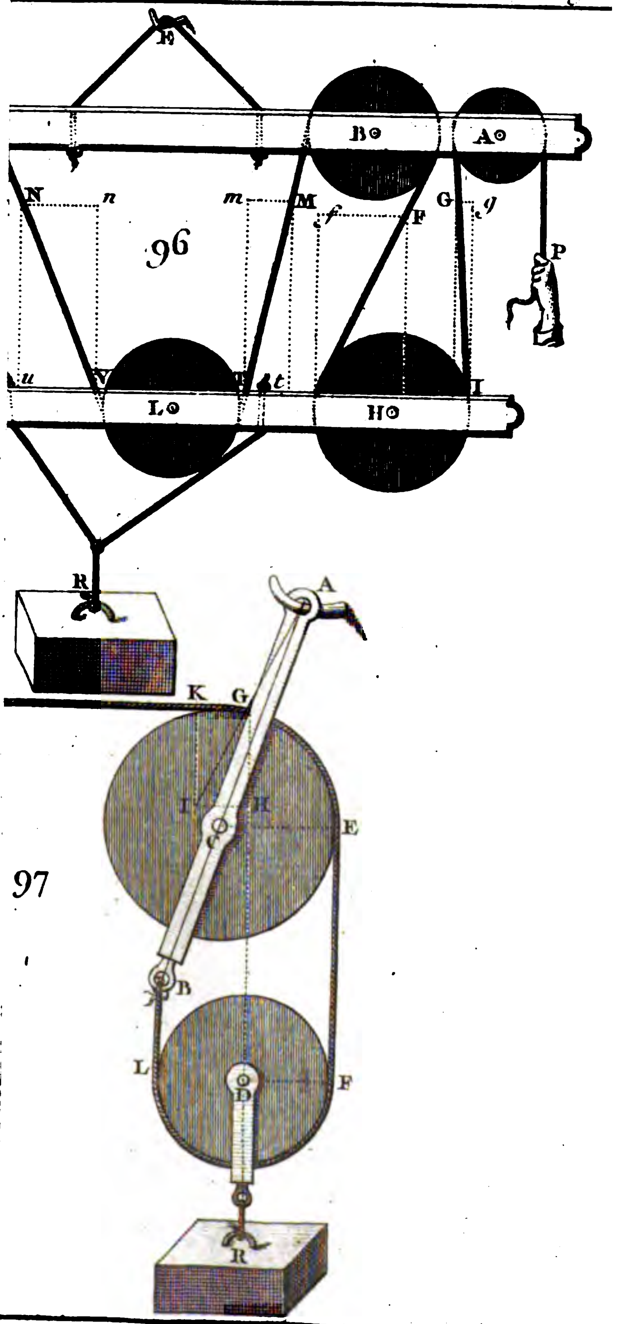


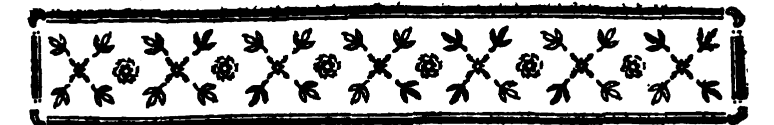

80
D
V
P
C
B
N
M
E
A
R
81
A
R
E
N
M
C
B
Q
P
D
82
M
83
R
T
M
N
P
C
Q
V
E
D
85
S
B
Z
X
F
G
I
K
O
Q
P
N
M
A
R
84
P
Q
M
N
T
E
R


87
n
X
B
V
O
A
π
K
L
N
M
P
R
m
E
B
A
88
L
M
I
H
G
P
O
K
E
B
A
P
N
L
M
I
H
G
89
O
K


91
A
B
C
D
P
X
S
L
H
R
V
M
E
G


94
95
T
B
A
D
C
P
P
P
X
S
R
R


E
B
A
N
n
m
M
f
F
G
g
96
P
u
V
T
t
I
L
H
R
A
K
G
I
H
E
C
97
B
L
D
F
R



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE SIXIEME.

Du Tour ou Treuil, & des Roues dentées en général.

CHAPITRE PREMIER.

Du Tour ou Treuil simple.

DÉFINITIONS.

411. LE *Tour* dont on va parler eſt une roue traverſée perpendiculairement à ſon plan par un cylindre qui lui ſert d'axe. Fig. 98.

On arrête le bout d'une corde au cylindre; & une puiſſance appliquée à la circonférence de la roue, la faiſant tourner oblige la corde à ſe rouler ſur le cylindre, & fait approcher de lui tout ce qui eſt attaché à l'autre extrémité de cette corde.

Les Latins nommoient cette machine *Axis in Peritrochio*, c'eſt-à-dire *Axe dans une roue :* les ouvriers qui ſont dans l'uſage de tronquer les noms, l'ont peut-être nommée *Peritrochio* en ſuppriman

Axis in, & de *Peritrochio* est venu le nom de *Treuil*.

Les Carriers qui se servent de cette machine pour élever leurs pierres du fond des carrières, la nomment simplement *Roue*; parce que la roue, qui est très-grande, est ce qu'il y a de plus apparent dans la machine. Les jantes de la roue sont garnies de chevilles placées perpendiculairement au plan de la roue, pour donner prise à la puissance qui doit être appliquée à la circonférence. Ordinairement on monte à ces chevilles comme à une échelle; & l'on agit ainsi sur la roue par le poids du corps.

Fig. 107. Quelquefois au lieu d'une roue garnie de chevilles, on emploie un tambour creux dans lequel un ou plusieurs hommes peuvent marcher & agir du poids de tout leur corps pour faire tourner la machine, & élever le fardeau suspendu à l'extrémité de la corde qui se roule sur le cylindre.

Fig. 99. Le plus souvent au lieu de garnir le cylindre d'une roue, on se contente de le faire traverser par des barres *EF*, *GH* auxquelles s'appliquent des puissances pour élever le fardeau. Ces barres sont nommées *Scytalæ* par Pappus.

Lorsque le cylindre est horizontal, on le nomme *Treuil*: les ouvriers le nomment *Singe* quand il est seul avec ses barres & ses supports, & qu'il est dégagé de toute autre machine: Vitruve l'appelle *Sucula*.

Fig. 100. Lorsque le cylindre sur lequel la corde se roule est vertical, c'est-à-dire perpendiculaire à l'horizon, on le nomme *Cabestan*, *Vindas*, *Virevau*, *Guindas* ou *Guindeau*: Vitruve le nomme *Ergata*. Lorsque le cylindre est dans cette position, l'on n'emploie presque jamais de roue, & l'on se contente de le mouvoir par des barres.

412. L'axe de la corde qui soûtient le poids, devant être considéré comme la direction propre de l'action de cette corde, & cet axe, dans le cas où la corde ne change point de figure en se roulant sur le cylindre, étant éloigné de la surface de ce cylindre d'une quantité égale au demi-diamètre de la corde ; il est évident qu'on pourra regarder la corde donnée comme si elle étoit infiniment déliée, & supposer qu'elle se roule sur un cylindre dont le rayon est plus grand que celui du cylindre proposé, d'une quantité égale au demi-diamètre de la corde donnée. Par exemple, si une corde d'un pouce de diamètre, ou de $\frac{1}{2}$ pouce de rayon, doit se rouler sur un cylindre de 29 pouces de diamètre ou de 14 $\frac{1}{2}$ pouces de rayon, on pourra supposer à sa place une corde infiniment déliée qui doit se rouler sur un cylindre de 15 pouces de rayon ou de 30 pouces de diamètre.

Par la même raison, lorsqu'une puissance s'appliquera à la circonférence de la roue d'un tour, par le moyen d'une corde d'un certain diamètre roulée sur cette roue ; on imaginera que cette corde est une ligne mathématique roulée sur une autre roue dont le rayon est plus grand que celui de la roue du tour, d'une quantité égale au demi-diamètre de la corde.

PROBLEME.

413. *Une puissance P étant appliquée à la circonférence de la roue d'un tour ou treuil horizontal, suivant une direction quelconque tangente de cette circonférence ; & un poids R attaché à l'extrémité d'une corde roulée sur le cylindre, étant en équilibre avec la puissance P ; on demande* Fig. 101.

1°. Le rapport du poids R *à la puissance* P;

2°. Les forces verticales & horizontales avec lesquelles les pivots ou tourillons I, K *qu'on regardera comme des points mathématiques, seront poussés sur leurs appuis.*

SOLUTION.

1°. Soit imaginé par l'axe *IK* du cylindre un plan horizontal qui rencontre la direction de la puissance *P* en *G*, la direction du poids *R* en *B*, & le plan de la roue continué indéfiniment, dans la droite *FGCN*; & soit tirée la droite *GB* qui rencontrera l'axe en un point *H*.

Ayant pris sur la direction de la puissance *P* une partie GQ pour représenter cette puissance; on imaginera sur GQ comme diagonale un parallélogramme rectangle *GEQF* dont le côté *GE* sera vertical, & par conséquent dans le prolongement du plan de la roue, & dont le côté *GF*, qu'on prendra sur le prolongement de la section *CG* du plan de la roue avec le plan horizontal *MN*, sera horizontal & perpendiculaire à l'axe *IK*. Il est démontré que la puissance P étant représentée par la diagonale GQ, peut être décomposée en deux forces représentées par les côtés *GE*, *GF* du même parallélogramme; en sorte que si l'on nomme *E*, *F* les deux forces dans lesquelles la puissance *P* sera ainsi décomposée, l'on aura *P* : *E* : *F* : : GQ : *GE* : *GF* ou : : GQ : *FQ* : *GF*.

Mais la direction *AP* de la puissance *P* étant une tangente de la circonférence de la roue; si par le point *A* où cette direction rencontre cette circonférence, on mène un rayon *AC*, l'angle *GAC* sera droit,

droit, & les deux triangles rectangles GFQ, GAC qui ont un angle opposé par le sommet, seront semblables. On aura donc $GQ : FQ : GF :: GC : AC : GA$; & puisque l'on a $P : E : F :: GQ : FQ : GF$, on aura aussi... $P : E : F :: GC : AC : GA$.

La force F étant dirigée suivant GF ou CF, tire perpendiculairement sur l'axe même IK, & est détruite par la résistance de cet axe qu'on suppose soûtenu dans tous les sens par ses extrémités. Cette force F ne contribuera donc en rien pour contrebalancer le poids R, & doit être réservée pour la charge des appuis. Ainsi des deux forces E, F, dans lesquelles la puissance P se décompose, il ne restera que la force E pour soûtenir le poids R en équilibre.

La force E ayant une direction verticale GE, agit parallèlement à la direction de la pesanteur du poids R : & comme ces deux forces sont appliquées aux extrémités de la droite GB qui passe par un point H de l'axe du cylindre, on pourra regarder cette droite GB comme un levier droit appuyé en H, & qui soûtient à ses extrémités deux forces parallèles E, R en équilibre. On aura donc $R : E :: GH : BH$.

On doit remarquer que le point B, où le plan horizontal MN rencontre la direction du poids R, est un point de la surface du cylindre. Car la direction du poids R étant verticale, elle touche le cylindre à l'extrémité d'un rayon horizontal, & par conséquent en quelqu'un des points où le plan horizontal MN, qui passe par l'axe & qui contient tous les rayons horizontaux du cylindre, rencontre la surface de ce cylindre.

Imaginons le cylindre coupé parallèlement au plan de la roue, par un plan DBb qui passe par le point B

où le cordon du poids *R* touche ce cylindre : le cylindre sera coupé perpendiculairement à son axe *ICDK* ; ainsi sa section sera un cercle ; *DB* sera un rayon ; & les lignes *DB*, *GCN* suivant lesquelles le plan *DBb* & celui de la roue seront coupés par le plan horizontal *MN* mené par l'axe de la roue, seront parallèles. Les deux triangles *GCH*, *BDH* seront donc semblables, & donneront $GH : BH :: GC : BD$: Et comme on a trouvé $R : E :: GH : BH$,

on aura aussi . . . . $R : E :: GC : BD$.

Mais puisque $P : E : F :: GC : AC : GA$ ou $E : P :: AC : GC$; si l'on multiplie ces deux dernières proportions par ordre, on aura $R : P :: AC : BD$; c'est-à-dire que quelle que soit la direction de la puissance *P*, le poids *R* est toûjours à cette puissance qui le soûtient en équilibre, comme le rayon de la roue où est appliquée la puissance *P*, est au rayon du cylindre où est appliqué le poids *R*. c. q. f. 1°. t.

2°. Pour trouver les forces verticales & horizontales avec lesquelles les pivots ou tourillons *I*, *K* du tour sont poussés sur leurs appuis, il faut nécessairement connoître le poids *R*, & la direction de la puissance *P* ou l'angle *AGC* que cette direction *AP* fait avec l'horizontale *CG*. Or si la direction *AP* de cette puissance est donnée, on connoîtra les rapports ou les valeurs des trois côtés *GC*, *AC*, *GA* du triangle *GAC* rectangle en *A* : & comme la puissance *P* sera toûjours donnée ou déterminée par le moyen du poids donné *R* dans la proportion $R : P :: AC : BD$, on déterminera aussi les deux forces *E*, *F*, l'une verticale, l'autre horizontale, par le moyen des proportionnelles $P : E : F :: GC : AC : GA$.

Le poids R étant donné, & la force E dirigée suivant la verticale GE étant trouvée, on remarquera que les deux forces parallèles & verticales E, R appliquées aux extrémités du levier GB, & en équilibre sur le point H de l'axe IK, procurent à ce point H une charge égale à leur somme $E + R$. Mais cette charge verticale $E + R$ peut être considérée comme la résultante de deux puissances verticales appliquées aux extrémités de l'axe IK, avec des quantités de force réciproquement proportionnelles aux distances de ces extrémités I, K au point H; en sorte que nommant I, K les forces verticales des points I, K, l'on aura $E + R : I : K :: IK : KH : IH$.

Or puisque la force $E + R$ a été trouvée, si l'on connoît la longueur de l'axe IK & celle de ses parties KH, IH, ces six proportionnelles feront déterminer les quantités de force I, K des deux charges verticales des appuis de même nom.

Mais les deux forces verticales I, K produites aux appuis par la force $E + R$ ne sont pas les seules forces dont ces appuis sont chargés : ils ont encore à porter deux autres forces qui leur viennent de la force nommée F dirigée suivant l'horizontale GF. Cette force horizontale F qui vient de la décomposition de la puissance P, & dont on n'a point encore fait usage, agissant perpendiculairement sur l'axe IK, doit être distribuée à ses deux points d'appui I, K en raison réciproque de leur distance IC, KC au point C de l'axe où elle est appliquée; en sorte que nommant i, k les charges horizontales que reçoivent les appuis I, K de la part de la force F, on aura $F : i : k :: IK : KC : IC$. Or la force F étant trouvée, si l'on connoît les trois lignes IK, KC, IC,

on déterminera par de simples proportions, les quantités de force des deux charges horizontales *i*, *k* des appuis *I*, *K*.

Les forces verticales *I*, *K*, & les forces horizontales *i*, *k*, avec lesquelles les pivots ou tourillons *I*, *K* du tour sont poussés vers leurs appuis, sont donc déterminées. *C. Q. F.* 2°. *T.*

Corollaire I.

Fig. 101. 414. Puisqu'on a trouvé pour chaque appui les deux forces, l'une horizontale & l'autre verticale, avec lesquelles il est pressé, on est en état de déterminer la quantité & la direction de la charge qui lui résulte en vertu de ces deux forces. Voici le détail des opérations graphiques qu'on peut faire pour trouver la quantité & la direction de la charge résultante à chaque appui.

Comme le cylindre & la roue sont dessinés en perspective pour en faire voir toutes les parties, & que plusieurs lignes n'y sont représentées qu'en racourci, on ne sauroit prendre de mesures sur cette figure; ainsi l'on sera obligé d'en construire une autre où la roue soit vûe de face avec une section du cylindre, perpendiculaire à son axe, c'est-à-dire parallèle au plan de la roue.

Fig. 102. Soient deux cercles concentriques dont l'un ait même rayon que la roue du tour, & l'autre même rayon que son cylindre: si par leur centre commun *c* l'on mène une droite horizontale indéfinie *gk* avec un rayon *ac*, de manière que l'angle *gca* soit égal à celui que la direction de la puissance *P* fait avec une ligne verticale; la tangente *ag* qu'on mènera par le point *a* représentera la direction de la puissance *P*,

& fera avec la ligne horizontale *gk* & le rayon *ac*, un triangle *gac* parfaitement égal au triangle *GAC* de la figure précédente. Ainſi puiſqu'on a trouvé *P* : *E* : *F* : : *GC* : *AC* : *GA*, on aura auſſi *P* : *E* : *F* : : *gc* : *ac* : *ga*.

Par le point *b* où la ligne horizontale *gk* rencontre la circonférence du petit cercle qui repréſente le cylindre, ſoit menée parallèlement à *ag* une droite *be* terminée par le prolongement du rayon *ac* : les triangles *gac*, *bec* ſeront ſemblables, & donneront *gc* : *ac* : *ga* : : *bc* : *ec* : *be*. Ainſi puiſqu'on vient de trouver *P* : *E* : *F* : : *gc* : *ac* : *ga*, on aura auſſi.... *P* : *E* : *F* : : *bc* : *ec* : *be*; en ſorte que ſi l'on repréſente la puiſſance *P* par le rayon *bc* du cylindre, les deux forces *E*, *F* ſeront repréſentées par *ec*, *be*.

Mais la puiſſance *P* étant repréſentée par le rayon *bc* du cylindre, on a trouvé dans le Problème précédent que le poids *R* ſera repréſenté par le rayon *ac* de la roue; ainſi l'on aura *R* : *P* : *E* : *F* : : *ac* : *bc* : *ec* : *be*.

Sur une droite quelconque, par exemple ſur *gk*, on placera en *ik* la longueur de l'axe *IK* du cylindre, de manière que l'on ait *ic* = *IC*, *ih* = *IH*, & par conſéquent *kc* = *KC*, *kh* = *KH*; puis ayant tiré par le point *i* ſuivant une direction quelconque une droite *iq* = *ae*, on tirera *kq*, & on lui mènera par le point *h* une parallèle *hd*. Ayant pris auſſi ſur *iq* une partie *im* = *he*, on tirera la droite *km*, & on lui mènera par le point *c* une parallèle *cn*. Cela fait, pendant que les quatre forces *R*, *P*, *E*, *F* ſeront repréſentées par les quatre lignes *ac*, *bc*, *ec*, *be*, les droites *qd*, *id* repréſenteront les deux forces verticales *I*, *K* dont nous avons vû (n°. 413) que les appuis

de même nom sont chargés ; & les deux droites *mn*, *ni* représenteront les deux forces horizontales i, k dont nous avons vû que les appuis sont pressés en vertu de la force horizontale F : en sorte qu'on aura $R : P : E : F : I : K : i : k : : ac : bc : ec : be : qd : id : mn : ni$.

Car 1°. le poids R étant représenté par ac, & la force E par ec, leur somme $E + R$ sera représentée par ae ou par $iq = ae$; & à cause des parallèles kq, hd, on aura $ik : kh : ih : : iq : qd : id$.

Mais on a trouvé (*n*°. 413) $E + R : I : K : : \begin{cases} IK : KH : IH \\ \text{ou } ik : kh : ih. \end{cases}$

Donc $E + R : I : K : : iq ; qd : id$ ou $: : ae : qd : id$; c'est-à-dire qu'en représentant les deux forces R, E par ac, ec, ou leur somme $E + R$ par ae, les deux forces verticales I, K dont les appuis sont chargés, seront représentées par qd, id.

2°. Les deux lignes parallèles km, cn donneront $ik : kc : ic : : im : mn : ni$. Mais on a trouvé (*n*°. 413) $F : i : k : : IK : KC : IC$ ou $: : ik : kc : ic$. On aura donc aussi $F : i : k : : im : mn : ni$; c'est-à-dire qu'en représentant la force horizontale F, qui vient de la décomposition de la puissance P, par $im = be$, les deux forces horizontales i, k qui en résulteront aux appuis I, K, seront représentées par mn, ni.

On aura donc, comme nous l'avons dit ci-dessus, $R : P : E : F : I : K : i : k : : ac : bc : ec : be : qd : id : mn : ni$.

Chacun des deux appuis I, K étant poussé par deux forces dont l'une est verticale & l'autre horizontale, il en résultera à chacun d'eux une force inclinée à l'horizon, qui sera la diagonale d'un parallélogramme rectangle dont les forces composantes seront les côtés. Cela posé,

Pour déterminer la quantité & la direction de la force composée dont l'appui *I* est chargé ; du centre *c* on prendra sur la ligne horizontale *g k* une partie *c o* = *m n*, & sur la verticale une partie *c s* = *q d* ; puis on achèvera le parallélogramme *c o t s* dont la diagonale *e t* représentera la grandeur & la direction de la force dont l'appui *I* du tour sera chargé.

Pour déterminer la grandeur & la direction de la force résultante dont l'appui *K* du tour sera chargé ; du centre *c* on prendra sur la ligne horizontale une partie *c u* = *n i*, & sur la verticale une partie *c y* = *i d* ; puis ayant fait sur ces deux côtés *c u*, *c y* un parallélogramme *c u x y*, la diagonale *c x* de ce parallélogramme représentera la grandeur & la direction de la force composée dont l'appui *K* du tour sera chargé.

COROLLAIRE II.

415. Après ce qui a été dit (nos. 412, 413 & 414), il est aisé de déterminer par le calcul le rapport du poids *R* à la puissance *P*, & les charges des appuis du tour avec leurs directions : en voici un exemple. Fig. 10

	pouces
Supposons que la longueur IK *du cylindre du tour entre les points d'appui de ses tourillons, soit de 8 pieds 8 pouces ou de*	104
La distance CD *ou* NB *du plan de la roue à la direction du poids* R, *de 3 pieds 2 pouces ou de*	38
La distance IC *du point d'appui* I *au centre* C *de la roue, de 2 pieds 7 pouces* $\frac{1}{2}$ *ou de* .	$31\frac{1}{2}$
Et par conséquent la distance KC *de l'autre appui* K *au même centre* C *de la roue, de 6 pieds 0 pouces 6 lignes ou de*	$72\frac{1}{2}$

Le diamètre de la roue, de 6 pieds 10 pouces ou de	....	pouces 82
Le diamètre du cylindre ou treuil, de 2 pieds 5 pouces ou de	....	29
Le diamètre de la corde qui porte le poids R, *de*	....	1

Le corps pesant R *avec le poids de son cordon* BR *de 100 livres.*

Enfin supposons que la puissance P *dirigée dans le plan de la roue suivant une tangente à sa circonférence, fait avec le plan horizontal* MN *un angle* AGC *de 60 degrés.*

Cela posé, on va déterminer 1°. le rapport du poids *R* à la puissance *P*, ou la quantité de force de cette puissance; 2°. les forces verticales dont les appuis *I*, *K* du tour sont chargés; 3°. les deux forces horizontales dont les mêmes appuis du tour sont chargés; 4°. les quantités de force qui résultent aux deux appuis du tour, en vertu de leurs charges verticales & horizontales; 5°. les directions de ces charges résultantes.

Pour trouver la puissance P.

Fig. 101. On a trouvé (*n*°. 413) que le poids *R* appliqué au cylindre, est à la puissance P appliquée à la roue du tour, comme le rayon ou le diamètre de la roue est à celui du cylindre. Mais la corde qui soûtient le poids *R* ayant 1 pouce de diamètre, & la pesanteur de ce poids agissant suivant l'axe de cette corde, on pourra considérer la corde comme si elle étoit infiniment déliée, & comme si elle se rouloit sur un autre cylindre dont le rayon fût plus long d'un

demi-pouce que celui du cylindre proposé. Ainsi au lieu de supposer, comme dans l'hypothèse une corde de 1 pouce de diamètre ou de $\frac{1}{2}$ pouce de rayon, roulée sur un cylindre de 29 pouces de diamètre ou de 14 $\frac{1}{2}$ pouces de rayon, on imaginera une corde infiniment déliée roulée sur un cylindre de 15 pouces de rayon ou de 30 pouces de diamètre. Par la même raison, si la puissance P est appliquée à un cordon de 1 pouce de diamètre, roulé sur la roue dont le diamètre a été supposé de 82 pouces, ou le rayon de 41 pouces, on imaginera aussi un cordon infiniment délié roulé sur une roue de 41 $\frac{1}{2}$ pouces de rayon ou de 83 pouces de diamètre. On fera donc cette proportion :

Comme le diamètre 83 pouces du cercle où l'on imagine que la puissance P *est appliquée,*

Est au diamètre 30 pouces du cercle où l'on imagine que le poids R *est appliqué ;*

Ainsi le corps pesant R *dont la pesanteur jointe à celle de son cordon* BR *a été supposée de 100 livres,*

Est à la quantité de force de la puissance P.

Cette proportion ou règle de trois étant calculée suivant les règles de l'Arithmétique, on trouvera la puissance P de $\frac{3000 \text{ livres}}{83}$ ou, à peu de chose près, de 36 livres 2 onces 2 gros $\frac{1}{2}$ ou de 36 $\frac{1}{7}$ livres.

Pour trouver les forces verticales dont les appuis I, K *du tour sont chargés.*

Après avoir décomposé la puissance P (qu'on a représentée par GQ, en deux forces exprimées par GE, GF dont la première qu'on a nommée E est Fig. 101.

verticale, & la feconde appelée F eft horizontale, on a trouvé $P : E : F :: GC : AC : GA$.

Mais le triangle GAC étant rectangle en A, & l'angle AGC étant fuppofé de 60 degrés, on aura (en repréfentant le finus de l'angle droit ou le finus total par $S. T$) $GC : AC : GA :: S. T : S. 60° : S. 30°$ ou (en ne prenant que 1000 pour le finus total) $GC : AC : GA :: 1000 : 866 : 500$. Donc $P : E : F :: 1000 : 866 : 500$, ou $1000 : 866 :: P : E$. Et comme on a trouvé $P = 36 \frac{1}{7}$ livres, on aura $1000 : 866 :: 36 \frac{1}{7}$ livres $: E$; ce qui donnera $E = 31 \frac{3}{10}$ livres à très-peu de chofe près; & par conféquent $E + R = 131 \frac{3}{10}$ livres, puifqu'on a fuppofé $R = 100$ livres.

On aura auffi $S. 60° : S. T$ ou $866 : 1000 :: AC : GC$. Mais le rayon AC, à l'extrémité duquel eft appliquée la puiffance P, eft de $41 \frac{1}{2}$ pouces, parce que le rayon de la roue eft augmenté du rayon de la corde. Ainfi l'on aura $866 : 1000 :: 41 \frac{1}{2}$ pouces GC, & par conféquent $GC = 47,92$ pouces.

Mais à caufe des triangles femblables GCH, BDH, on aura $GC : BD :: CH : DH$, & *componendo* $GC + BD : GC :: CD : CH$. Or $GC = 47,92$ pouc., $BD = 15$ pouc. en comptant le rayon de la corde, & l'on a fuppofé $CD = 38$ pouc. On aura donc $62,92$ pouc. $: 47,92$ pouc. $:: 38$ pouc. $: CH$; & par conféquent $CH = 28,92$ pouces. Donc $IC + CH$ ou $IH = 60,42$ pouces : & comme on a fuppofé l'axe $IK = 104$ pouces, on trouvera $IK - IH$ ou $KH = 43,58$ pouces.

Or en appelant I, K les charges verticales des

appuis de même nom, on a trouvé (n°. 413) $IK : KH : IH :: E + R : I : K$.

On aura donc $\begin{cases} 104 : 43,58 :: 131,3^{\text{liv.}} : I, \\ 104 : 60,42 :: 131,3^{\text{liv.}} : K, \end{cases}$

& par conséquent les charges verticales $\begin{cases} I = 55,02^{\text{liv.}} \\ K = 76,28^{\text{liv.}} \end{cases}$ C. Q. F. T.

Pour trouver les deux forces horizontales dont les appuis I, K *du tour sont chargés.*

En cherchant les charges verticales des appuis du tour, on a trouvé $P : E : F :: 1000 : 866 : 500$. On aura donc $1000 : 500 :$ ou $2 : 1 :: P : F$. Ainsi $F = \frac{1}{2} P$: & comme on a trouvé $P = 36\frac{1}{7}^{\text{liv.}}$ on aura $F = 18\frac{1}{14}^{\text{livres}}$. Fig. 101.

En nommant i, k les deux forces horizontales dont les appuis du tour sont chargés, on a trouvé $IK : KC : IC :: F : i : k$.

Mais on a supposé $IK = 104^{\text{pouc.}}$ $KC = 72,5^{\text{pouc.}}$ $IC = 31,5^{\text{pouces}}$; & l'on a trouvé $F = 18\frac{1}{14}^{\text{livres}}$.

On aura donc $\begin{cases} 104 : 72,5 :: 18\frac{1}{14}^{\text{liv.}} : i, \\ 104 : 31,5 :: 18\frac{1}{14}^{\text{liv.}} : k, \end{cases}$

& par conséquent les charges horizontales $\begin{cases} i = 12,598^{\text{liv.}} \\ k = 5,473^{\text{liv.}} \end{cases}$ C. Q. F. T.

Pour trouver les quantités de force des charges résultantes des deux appuis.

1°. On vient de voir que l'appui I est chargé de deux forces I, i, l'une verticale & l'autre horizontale.

Que la force verticale I est de . . $55,02^{\text{liv.}}$

Et la force horizontale i de . . . . $12,598^{\text{liv.}}$

Or les directions de ces deux forces étant à angle droit, leur force résultante sera représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle qui auroit pour côtés 55, 02 & 12, 598; & pour avoir cette diagonale, il faudra quarrer ces deux nombres, & tirer ensuite la racine quarrée de la somme de leurs quarrés. Voici l'opération.

Le quarré de 55, 02 est	3027, 2004
Le quarré de 12, 598 est	158, 709604
Ainsi la somme de ces quarrés est . .	3185, 910004
Et la racine quarrée de cette somme est	56, 444

Or ce nombre est un nombre de livres, puisque les nombres qu'on a quarrés étoient des nombres de livres. Donc la charge résultante de l'appui *I* du tour est de 56, 444 livres. C. Q. F. 1° T.

2°. On a vû que l'appui *K* du tour est chargé de deux forces *K*, *k*, l'une verticale & l'autre horizontale;

Que la force verticale *K* est de . . 76, 28 liv.
Et la force horizontale *k* de . . . 5, 473 liv.

Comme ces deux forces sont à angle droit, on aura leur résultante en les quarrant, & en tirant ensuite la racine quarrée de la somme de leurs quarrés.

Or le quarré de 76, 28 est	5818, 6384
Le quarré de 5, 473 est	29, 953729
La somme de ces deux quarrés est . .	5848, 592129
Et la racine quarrée de cette somme est	76, 476

Donc la force résultante dont l'appui *K* du tour est chargé, est de 76, 476 livres. C. Q. F. 2°. T.

Pour trouver les directions des charges résultantes des appuis.

Comme les forces composées *ct*, *cx* des deux appuis *I*, *K* sont les résultantes des forces verticales *cs*, *cy*, & des forces horizontales *co*, *cu* avec lesquelles ces appuis sont poussés ; les directions *ct*, *cx* des forces composées des appuis seront des hypoténuses de triangles rectangles *cst*, *cyx* qui auront pour côtés contigus aux angles droits les lignes par lesquelles les forces verticales & horizontales sont représentées ; & l'on trouvera les directions *ct*, *cx* de ces hypoténuses, c'est-à-dire les angles qu'elles forment avec les lignes verticales *cs*, *cy*, en faisant les deux proportions suivantes : Fig. 102.

1°. *Comme la charge verticale* cs *ou* 55, 02 *livres de l'appui* I,

Est à la charge horizontale co *ou* st *du même appui ou à* 12, 598 *livres ;*

Ainsi le sinus total 100000,

Est à la tangente de l'angle tcs *que la charge résultante de l'appui* I *fait avec la verticale* cs.

Cette règle de trois étant faite, on trouvera 22897 pour la tangente de l'angle *tcs* ; & cherchant cette tangente dans les tables, on trouvera qu'elle appartient à un angle de 12° 54'. Ainsi l'angle *tcs* que la direction de la charge résultante à l'appui *I* fait avec la verticale *cs*, sera de 12° 54'. *C. Q. F.* 1°. *T.*

2°. *Comme la charge verticale* cy *ou* 76, 28 *livres de l'appui* K,

Est à la charge horizontale cu *ou* 5, 473 *livres du même appui ;*

Ainsi le sinus total 100000,

Est à la tangente de l'angle xcy *que la direction* cx *de la charge résultante de l'appui* K *fait avec la verticale* cy.

Cette règle de trois étant faite, on trouvera la tangente de l'angle *xcy* de 7175; & cherchant cette tangente dans les tables, on trouvera qu'elle appartient à un angle de 4° 6′. Ainsi la direction de la charge résultante de l'appui *K* fait avec la verticale un angle de 4° 6′. *C. Q. F.* 2°. *T.*

Corollaire III.

Fig. 101. **416.** Si la direction de la puissance *P*, est parallèle à celle du poids *R*, c'est-à-dire verticale, le parallélogramme *GEQF*, qu'on a fait pour décomposer la puissance *P*, s'évanouira; parce que sa diagonale *GQ* devenant verticale se confondra avec son côté *GE*; ainsi le côté *GF* deviendra nul. La puissance *P* représentée par *GQ* sera donc égale à la force *E*, & la force horizontale *F* représentée par *GF* sera nulle; d'où il suit que les appuis *I*, *K* du tour n'auront plus à soûtenir que des charges verticales causées par $E + R$ ou plûtôt par $P + R$, qu'on doit distribuer aux appuis *I*, *K*, de manière que l'on ait (en nommant *I*, *K* les charges de ces appuis) $P + R : I : K :: IK : KH : IH$.

On doit remarquer dans l'hypothèse présente, que le point *G*, où le plan horizontal *MN* mené par l'axe du cylindre rencontre la direction de la puissance *P*, devient un point de la circonférence de la roue.

Corollaire IV.

Fig. 101. **417.** Si la direction de la puissance *P*, devient

horizontale, on imaginera qu'elle concourt avec le plan horizontal *MN* en quelque point *G* infiniment éloigné du tour. Alors le parallélogramme *GEQF* qu'on a fait pour décomposer la puissance *P* en deux forces *GE*, *GF*, l'une verticale, l'autre horizontale, s'évanouira; parce que sa diagonale *GQ* devenant horizontale, l'angle *QGF*, qu'elle fera avec l'horizontale *GF*, deviendra nul. Ainsi la puissance *P* ne produira plus de force verticale; & la somme *E* + *R* des deux forces en équilibre appliquées verticalement aux extrémités du levier *GB*, se réduira au seul poids *R* dont il faudra distribuer la pesanteur aux appuis du treuil, en raison réciproque de leur distance au point d'appui *H* du levier *GB*.

Or dans le cas présent le point d'appui *H* se trouvera au centre *D* de la section du cylindre faite parallèlement à la roue par le point *B*. Car le point *G*, où l'on imagine que la direction de la puissance *P* rencontre le plan *MN*, étant infiniment éloigné de l'axe *IK* du tour, la droite *BG* sera parallèle à *NG*, & se confondra par conséquent avec *BD* qui est aussi parallèle à *NG*: d'où il suit que le point *H*, où l'axe *IK* sera rencontré par *BG*, se confondra avec le centre *D* de la section du cylindre.

Donc si l'on nomme encore *I*, *K* les deux forces verticales qui résultent aux appuis de même nom, de la part de la force *E* + *R* réduite au seul poids *R*, au lieu d'avoir $R : I : K :: IK : KH : IH$, on aura . . . $R : I : K :: IK : KD : ID$.

La puissance *P* étant supposée horizontale, & le point *G* où sa direction rencontre le plan horizontal *MN*, étant par conséquent infiniment éloigné du

tour, l'angle QGF deviendra infiniment petit, & la ligne GQ par laquelle on repréſente la puiſſance P, ſe confondra dans toute ſa longueur aveo la ligne GF par laquelle on a repréſenté la force qui agit horizontalement ſur l'axe IK du tour. Or la force F devenue égale à P, & agiſſant ſur le centre C de la roue, ſe diſtribuera aux appuis I, K du tour en raiſon réciproque des diſtances de ces appuis au centre C de la roue. Ainſi en nommant encore i, k les forces horizontales qui réſultent aux appuis du tour en vertu de la force $F = P$, on aura $P : i : k :: IK : KC : IC$.

Toutes les forces dont les appuis I, K du tour ſont chargés, étant déterminées avec leurs directions, on trouvera, comme on a fait (*nos.* 414 & 415) la quantité & la direction de la réſultante des deux forces, l'une horizontale & l'autre verticale, avec leſquelles chaque appui ſera pouſſé.

Corollaire V.

Fig. 101. 418. Quel que ſoit l'angle que la direction de la puiſſance P fera avec le plan horizontal MN, & quelle que ſoit la diſtance qu'il y aura entre le plan de la roue & la ſection du cylindre faite par le point B parallèlement à la roue, on trouvera toûjours (*n°.* 413) $R : P :: AC : BD$; c'eſt-à-dire que le poids R ſera toûjours à la puiſſance P qui le ſoûtiendra en équilibre, comme le rayon de la roue eſt à celui du cylindre. On pourra donc varier comme on voudra la direction de la puiſſance P, & la ſituation de la corde du poids R; en ſorte que la ſection du cylindre pourra être rapprochée autant qu'on voudra du plan de la roue, ſans rien changer au rapport du poids R à la puiſſance P.

On

On pourra donc supposer, comme a fait M. Varignon, la direction du poids R située dans le plan de la roue, sans cesser d'avoir le poids R à la puissance P, comme le rayon de la roue est à celui du cylindre. Fig. 103 & 104.

La direction du poids R étant dans le plan de la roue aussi-bien que celle de la puissance P, ces deux directions se rencontreront en quelque point A, ou seront parallèles; ce qui ne doit point faire un cas particulier, puisqu'on peut imaginer que deux lignes parallèles concourent en un point infiniment éloigné.

Or les directions des deux puissances R, P se rencontrant en un point A, il n'y a plus aucune difficulté pour trouver les directions des charges des appuis, & les rapports de ces charges au poids R & à la puissance P. Car il résulte des deux puissances R, P une force représentée par la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés expriment les forces composantes R, P. Mais les deux puissances R, P étant en équilibre, leur résultante doit nécessairement trouver un obstacle capable de l'arrêter : & comme il n'y a point dans le tour d'autre obstacle que son axe dont les deux bouts sont appuyés, la résultante des deux puissances R, P doit être dirigée vers l'axe, c'est-à-dire vers le centre C de la roue où l'axe rencontre le plan de cette roue.

Donc si par le centre C de la roue, & par le point A où concourent les directions des deux puissances R, P, l'on mène une droite CA; & qu'ayant pris du point A sur cette droite une partie quelconque AE pour représenter la résultante des deux puissances R, P, l'on fasse sur cette partie AE, comme diagonale, un parallélogramme $ABED$ dont les côtés

contigus *AB*, *AD* ſoient pris ſur les directions des deux puiſſances *P*, *R*; les deux puiſſance *R*, *P* & la charge du centre *C* de la roue ſeront repréſentées par les côtés contigus *AD*, *AB* & par la diagonale *AE* du parallélogramme *ABED*; en ſorte que ſi l'on nomme *C* la réſultante des deux puiſſances *R*, *P* ou la charge du centre *C* de la roue, on aura *R*:*P*:*C*::*AD*:*AB*:*AE*, ou::*AD*:*ED*:*AE*.

Si du centre *C* commun à la roue & à la ſection du cylindre à la circonférence duquel on ſuppoſe le poids *R* appliqué, l'on mène des rayons *CG*, *CF* aux points où les directions des deux puiſſances *R*, *P* touchent le cylindre & la roue, & qu'on tire la droite *FG*; on verra aiſément que les triangles *ADE*, *FCG* ſeront ſemblables & donneront *AD* : *ED* : *AE* : : *FC* : *GC* : *FG*; & comme on a trouvé *R* : *P* : *C* : : *AD* : *ED* : *AE*, on aura auſſi *R* : *P* : *C* : : *FC* : *GC* : *FG*; c'eſt-à-dire que le poids *R* ſera à la puiſſance *P* & à la charge du centre de la roue, comme le rayon de la roue eſt à celui du cylindre & à la droite *FG* menée par les points où la roue & le cylindre ſont touchés par les directions des deux puiſſances *P*, *R*.

A l'égard de la charge *C* du centre de la roue, il faudra la diſtribuer aux deux appuis du tour en raiſon réciproque des diſtances de ces appuis au centre *C* de la roue, & donner aux charges particulières de ces appuis des directions parallèles à la droite *AC* menée du point de concours des deux puiſſances *R*, *P* au centre *C* de la roue.

On n'a ſuppoſé dans ce Corollaire la direction du poids R *&* *celle de la puiſſance* P *dans le même plan*

de la roue, que parce qu'on est accoutumé à les supposer telles. Mais il faut convenir que ce cas n'arrive jamais, parce que la corde du poids étant obligée de se rouler sur le cylindre, est toûjours à quelque distance du plan de la roue, & peut en être éloignée de toute la distance qu'il y a de ce plan à l'arrasement du cylindre où commence le collet qui tourne dans la fente de l'un des appuis.

COROLLAIRE VI.

419. On a toûjours supposé que la puissance *P* appliquée à la circonférence de la roue étoit dirigée dans le plan de cette roue suivant une tangente à sa circonférence. Mais il peut arriver que la puissance *P* ne soit point dirigée suivant une tangente; & dans ce cas, il faut imaginer une autre roue à la circonférence de laquelle la direction de la puissance *P* soit tangente. Fig. 105.

Par exemple, si la puissance *P* est appliquée à une cheville *S* d'une roue, & que son action soit dirigée dans le plan de cette roue suivant une droite *FS*; on mènera une perpendiculaire *CF* du centre de la roue sur la direction de cette puissance, & ayant décrit une circonférence du point *C* comme centre & du rayon *CF*, la direction *FS* de la puissance *P* se trouvera tangente à cette circonférence: en sorte qu'on pourra imaginer que la puissance *P* est appliquée à cette circonférence suivant une direction tangente à cette même circonférence.

COROLLAIRE VII.

420. Si l'on applique à la circonférence d'une roue une puissance *P* dirigée suivant une tangente Fig. 106.

AP à cette circonférence, cette puissance sera la force avec laquelle la circonférence de cette roue tournera : & si l'on décrit sur le plan de la roue un cercle concentrique qui ait *BC* pour rayon, la puissance *R* qu'il faudra appliquer à cette circonférence pour faire équilibre avec la puissance P, sera la force avec laquelle le point *B* tournera.

Mais dans le cas où les deux puissances *P*, *R* sont en équilibre, on a $P : R :: BC : AC$.

Donc la force que la circonférence d'un cercle ou d'une roue a pour tourner,

Est à la force avec laquelle tourne un point quelconque *B* du plan de ce cercle ou de cette roue ;

Comme la distance *BC* de ce point *B* au centre *C*,

Est au rayon *AC* du cercle ou de la roue.

DE LA CONSTRUCTION D'UN TOUR propre à tirer de l'eau d'un puits, ou des pierres du fond des carrières & des mines.

421. Lorsqu'on veut tirer à bras d'homme de l'eau d'un puits peu profond, on n'emploie ordinairement qu'un seau attaché au bout d'une corde qui passe sur une poulie, pour donner à l'agent la facilité d'employer sa force de haut en bas, & de s'aider du poids de son corps.

Quoique dans cette opération le temps pendant lequel le seau descend ne soit pas employé à tirer de l'eau, on ne le regarde pas comme absolument perdu ; parce qu'alors l'agent se repose, & se trouve ensuite en état de tirer avec plus de vigueur. Mais cette manoeuvre a un inconvénient, en ce que l'agent

porte ou tire non-seulement le poids de l'eau dont il a besoin, mais encore le poids du seau & celui de la corde qui est dans le puits depuis le seau jusqu'à la mardelle.

Lorsque le puits est plus profond, on emploie deux seaux égaux attachés aux deux extrémités d'une même corde, afin que le poids du seau vuide qui descend fasse équilibre avec le fût du seau plein qui monte. Dans ce cas l'agent n'a plus à soûtenir que le poids de l'eau contenue dans le seau qui monte, plus ou moins la différence du poids de la corde qui descend au poids de la corde qui monte; de manière que 1°. quand les deux seaux sont à la même hauteur dans le puits, l'agent soûtient précisément le poids de l'eau qu'il fait monter; 2°. lorsque le seau plein est plus bas que le seau vuide, l'agent soûtient le poids de l'eau, & le poids d'une partie de corde égale à la distance des deux seaux: 3°. au contraire lorsque le seau plein est plus haut que celui qui descend, la puissance ne soûtient que le poids de l'eau moins celui d'une partie de corde égale à la distance des deux seaux.

Cette inégalité de force exercée par l'agent n'a point d'inconvénient lorsque le puits n'a qu'une profondeur médiocre; parce que si l'agent exerce une force plus grande que la moyenne dans la première moitié du temps qu'il emploie pour faire monter le seau, il est soulagé dans la seconde moitié du temps pendant laquelle il emploie une force plus petite que la force moyenne.

Mais lorsque les puits sont d'une grande profondeur, par exemple de 80 pieds, 100 pieds ou 120 pieds, il n'est guère possible de se servir d'une

poulie ſimple, lors même qu'on emploie deux ſeaux. Car quoique le ſeau vuide qui deſcend faſſe équilibre avec le fût du ſeau plein qui monte, la partie de la corde que l'agent doit ſoûtenir avec le poids de l'eau pendant la première partie du temps, peut faire un poids plus grand que la quantité de force dont cet agent eſt capable. Suppoſons, par exemple, un puits de 120 pieds ou 20 toiſes de profondeur, & qu'on emploie une corde d'un pouce de diamètre dont chaque toiſe pèſe environ 2 livres : lorſque le ſeau plein ſortira de l'eau & commencera à monter, le ſeau vuide ſera au haut du puits auprès de la mardelle, & il y aura environ 20 toiſes de diſtance d'un ſeau à l'autre. L'agent ſera donc obligé de ſoûtenir le poids de 20 toiſes de corde ou 40 livres outre le poids de l'eau contenue dans le ſeau. Or 40 livres excédent de beaucoup la force de 25 livres qu'un homme peut employer en travaillant de ſuite pendant quelque temps. Ainſi un homme ne doit point employer une poulie ſimple, même avec deux ſeaux, pour tirer de l'eau d'un puits de 20 toiſes de profondeur.

Il eſt vrai que ſi l'on employoit une corde d'écorce de tilleul, l'agent ſeroit moins fatigué par ſon poids. Mais une corde de tilleul de 20 toiſes peſera au moins 15 à 18 livres lorſqu'elle ſera humide, & l'agent qui n'a guère plus de 25 livres de force à employer, ne pourra tirer qu'environ 8 ou 10 livres d'eau dans chaque ſeau : ainſi il ſera obligé de tirer deux ou trois ſeaux d'eau pour avoir la valeur d'un ſeau d'eau ordinaire.

En ſe ſervant du tour & de deux ſeaux, on a différens moyens pour ménager l'agent, & ne lui

faire exercer que la force nécessaire pour tirer l'eau dont on a besoin, comme si la corde & les seaux n'avoient aucune pesanteur. Mais pour cela il faut que chaque seau ait une corde particulière dont la longueur soit égale à la profondeur du puits, & que chaque corde se roule sur une bobine particulière dont il faut déterminer la figure & les dimensions.

1°. Chacune des deux bobines peut avoir la figure d'un cone ou conoïde tronqué; & les cordes doivent être disposées de manière que quand le seau plein sortira de l'eau & commencera à monter, sa corde soit appliquée au plus petit rayon de son conoïde, pendant que la corde du seau vuide qui se trouvera pour lors au haut du puits, sera appliquée au plus grand rayon de sa bobine conoïde. Et réciproquement lorsque le seau plein sera au haut du puits, sa corde doit être appliquée au plus grand rayon, c'est-à-dire au plus gros bout de sa bobine, pendant que la corde du seau vuide qui sera au fond du puits pour s'y remplir, sera appliquée au plus petit rayon de sa bobine.

On verra dans le Problême suivant comment on détermine les dimensions de ces bobines.

2°. Les deux bobines peuvent être cylindriques, & il faudra déterminer leurs grosseurs & leurs longueurs, de maniere que les cordes en redoublant leurs tours augmentent les rayons des bobines dans des rapports tels que l'agent trouve toûjours à peu près la même résistance pendant tout le temps qu'il emploiera à élever un seau d'eau. On se sert de ces bobines cylindriques dans la mine de cuivre de Fahlun en Suède, appelée *Coperberg*, où il faut tirer le minéral de 100 toises de profondeur.

PROBLEME.

Fig. 107. 422. *Faire un tour dans la roue duquel un homme puisse commodément marcher, pour tirer de l'eau par le moyen de deux seaux appliqués à deux cordes roulées en sens contraire sur leurs bobines; & faire en sorte que l'homme n'ait guére plus de peine qu'il en auroit si les cordes & les seaux n'avoient point de pesanteur.*

Première Solution.

On suppose ordinairement qu'un homme pèse 150 livres.

Un homme ayant environ cinq pieds & demi de haut, ne sauroit marcher dans une roue sans risquer de se heurter la tête à son arbre que nous supposerons de 1 pied de diamètre, à moins que la roue n'ait 12 pieds de diamètre : ainsi nous supposerons que le rayon de la roue est de 6 pieds.

Pour qu'un homme marche commodément dans une roue, il ne faut pas qu'il soit trop éloigné du rayon vertical de cette roue; parce qu'il se trouveroit sur un rampant trop roide, & qu'il seroit obligé de gravir au lieu de marcher, ce qui le fatigueroit beaucoup en peu de temps : mais il faut qu'il soit placé dans un endroit de la circonférence dont l'inclinaison à l'horizon soit assez douce pour y pouvoir marcher long-temps de suite; & cette inclinaison sera assez commode lorsque sa hauteur sera égale à la sixième partie de sa longueur. Nous supposerons donc que le centre de gravité de l'homme répond verticalement à un point *Z* de la circonférence de la roue, dont la tangente *ZT* fait avec la verticale *ZV* & l'horizontale *VT* un triangle rectangle

ZVT dont la hauteur VZ eſt égale à la ſixième partie de l'hypoténuſe ZT.

Si l'on imagine un triangle rectangle CDZ qui ait pour côtés la verticale DZ, une partie CD du diamètre horizontal, & le rayon CZ; ce triangle aura les côtés perpendiculaires à ceux du triangle ZVT, & ſera par conſéquent ſemblable à ce triangle; ainſi l'on aura $CD : CZ :: ZV : ZT$, ou $:: 1 : 6$, parce qu'on ſuppoſe $ZV = \frac{1}{6} ZT$. On ſuppoſera donc que le centre C de la roue eſt éloigné de la ligne verticale DZ qui paſſe par le centre de gravité de l'homme, d'une quantité égale à la ſixième partie du rayon de la roue; & l'on aura $CD = 1$ pied.

On ſuppoſera que chaque ſeau peut contenir le quart d'un muid, c'eſt-à-dire deux pieds cubes, & que le pied cube d'eau ordinaire pèſe 72 livres; ainſi le poids de l'eau contenue dans un ſeau ſera de 144 livres.

On ſuppoſera auſſi que chaque ſeau avec ſes cercles de fer, ſes armatures, ſon anſe & le bout de chaîne qui lui eſt attachée afin que la corde ne deſcende pas juſqu'à l'eau, pèſe environ 40 livres.

Enfin l'on ſuppoſera que le puits a 20 toiſes de profondeur, ou qu'il ſe roule ſur la bobine 20 toiſes de corde d'un pouce de diamètre pour tirer un ſeau d'eau, & que ces 20 toiſes de corde pèſeront 40 livres.

Lorſque le ſeau S ſera plein d'eau, & qu'il ſera au haut du puits prêt à être vuidé, il ſera en équilibre avec le poids de l'homme, le poids du ſeau vuide qui ſera au fond du puits, & le poids de 20 toiſes de corde. Lorſque le même ſeau ſera vuidé, & que l'homme aura changé de côté dans la roue pour retirer le ſeau R qui ſera rempli; le poids de ce

seau *R* plein d'eau, joint au poids de 20 toises de corde, sera en équilibre avec le poids de l'homme & le poids du seau vuide *S*. Dans ces deux cas le moment de l'homme plus le moment du seau & de la corde qui se trouveront du côté que l'homme marchera, composeront un moment total égal au moment du seau plein qui sera de l'autre côté; & par conséquent le moment du poids de l'homme sera égal à la différence des momens des deux seaux.

Soit *CB* le rayon de la bobine où est actuellement appliqué le poids du seau *S* plein d'eau & prêt à être vuidé : comme le poids de ce seau sera de 184 livres, savoir de 40 livres pour son propre poids, & de 144 livres pour le poids de l'eau qu'il contiendra, son moment sera 184 livres × *CB*. On ne fait point entrer dans ce moment le poids de la corde du seau *S*, parce qu'elle est roulée sur la bobine.

De l'autre côté, le seau vuide *R* qui sera au fond du puits & qui pèsera 80 livres avec sa corde totalement déroulée, sera appliqué au plus petit rayon *CF* de sa bobine, & son moment sera 80 livres × *CF*.

Ainsi lorsque le seau plein *S* sera prêt à être vuidé, & que le seau vuide *R* sera au fond du puits, la différence des momens de ces deux seaux avec leurs équipages sera 184 liv. × *CB* — 80 liv. × *CF*.

Les deux seaux étant dans la même disposition; lorsque le seau *S* sera vuide & que le seau *R* sera plein & prêt à monter; le seau *R*, son eau & sa corde peseront ensemble 224 livres, & le moment de ce poids sera 224 livres × *CF*.

De l'autre côté le seau vuide *S* dont la corde sera roulée pesera 40 liv., & son moment sera 40 liv. × *CB*.

Ainsi lorsque le seau S sera vuide, & que le seau plein R sera au fond du puits, la différence des momens des deux seaux sera $224^{liv.} \times CF - 40^{liv.} \times CB$.

Or ces deux différences de momens seront égales, puisque chacune d'elles doit être égale au moment du poids de l'homme. On aura donc $184^{liv.} \times CB - 80^{liv.} \times CF = 224^{liv.} \times CF - 40^{liv.} \times CB$.

Ajoûtant $80^{liv.} \times CF + 40^{liv.} \times CB$ à chaque membre de cette égalité pour la rendre plus simple, on aura $224^{liv.} \times CB = 304^{liv.} \times CF$; d'où l'on tirera cette proportion $CB : CF :: 304 : 224$, ou $:: 19 : 14$.

Ainsi le grand rayon de l'une des bobines sera au petit rayon de l'autre bobine, dans le rapport de 19 à 14 : & comme les deux bobines doivent être semblables & égales, puisqu'il faut qu'elles se trouvent toutes les deux dans les mêmes cas, il est évident que les rayons extrêmes de chaque bobine doivent être entr'eux comme 19 & 14.

Pour déterminer les longueurs absolues des rayons extrêmes de chaque bobine, on prendra le moment du poids de l'homme, & on l'égalera à l'une des différences qu'on a trouvées entre les momens des seaux.

L'une des différences des momens des seaux est $224^{liv.} \times CF - 40^{liv.} \times CB$; & comme on a trouvé $CB : CF :: 19 : 14$, ou $CF = \frac{14\ CB}{19}$, cette différence des momens des seaux deviendra $224^{liv.} \times \frac{14\ CB}{19} - 40^{liv.} \times CB$.

Le poids de l'homme qu'on a supposé de 150 $^{liv.}$ étant appliqué à un rayon *CD* qu'on a déterminé de 1 ^{pied} ou de 12 ^{pouces}, le moment du poids de l'homme sera 150 $^{liv.}$ × 12 ^{pouces}. Ainsi l'on aura

$$224^{\text{liv.}} \times \frac{14\ CB}{19} - 40^{\text{liv.}} \times CB = 150^{\text{liv.}} \times 12^{\text{pouc.}},$$

$$\text{ou } \frac{3136\ CB}{19} - \frac{760\ CB}{19} = 1800^{\text{pouces}},$$

$$\text{ou } \frac{2376\ CB}{19} = 1800^{\text{pouces}}:$$

& si l'on multiplie chaque membre par 19, on aura $2376\ CB = 34200^{\text{pouces}}$.

Enfin divisant chaque membre de cette égalité par 2376, on aura $CB = 14\frac{13}{33}$ $^{pouc.}$ ou 14, 394 $^{pouc.}$

Comme on a trouvé 19 : 14 : : *CB* : *CF*, ou $CF = \frac{14\ CB}{19}$; si l'on met à la place de *CB* sa valeur 14, 394 $^{pouc.}$, on trouvera *CF* = 10, 606 $^{pouc.}$

Les deux rayons extrêmes de chaque bobine seront donc, l'un de 14, 394 ^{pouces}, & l'autre de 10, 606 ^{pouces}, en y comprenant la moitié de l'épaisseur de la corde qui entre toûjours dans la longueur du levier. Ainsi lorsqu'on emploiera une corde de 1 ^{pouce} de diamètre, les vrais rayons extrêmes des deux bobines nues seront l'un de 13, 894 ^{pouces}, & l'autre de 10, 106 ^{pouces}.

Les rayons extrêmes des bobines étant trouvés, il faut déterminer la longueur de ces bobines. Pour cela il faut remarquer qu'on ne doit prendre pour la longueur d'une bobine, que la partie de cette bobine qui peut être couverte par la corde, lorsque toute cette corde, qu'on a supposée de 20 toises,

est roulée sur elle ; en sorte que la corde ayant un pouce de diamètre, la longueur du rampant de la bobine aura autant de pouces que la corde fera de tours pour se rouler entièrement.

Pour déterminer le nombre des tours que la corde fera sur une bobine, on supposera que l'axe d'une corde qui se roule ne change point de longueur : ce qui est conforme à l'expérience que j'en ai faite ; car une corde d'un pouce juste de diamètre, qui faisoit précisément un tour sur un cylindre de 13 pouces de diamètre, avoit justement 44 pouces de longueur ; en sorte que cette corde étoit précisément égale à la circonférence d'un cercle dont le diamètre avoit un pouce de plus que celui du cylindre sur lequel elle étoit roulée. Les rayons extrêmes de chaque bobine, en y comprenant la moitié de l'épaisseur de la corde, étant l'un de 14, 394 pouces, & l'autre de 10, 606 pouc. ; son rayon moyen sera de 12 $\frac{1}{2}$ pouc., & son diamètre moyen, en y comprenant celui de la corde, sera de 25 pouces. Ainsi en multipliant 25 pouces par 3 $\frac{1}{7}$, le produit 78 $\frac{4}{7}$ pouces sera la longueur de la corde qui peut faire le tour du cercle moyen d'une bobine.

Considérant chaque bobine comme une fusée de la forme d'un cone tronqué, la longueur de la corde qui la couvrira sera égale à ce qu'il en faudra pour faire le tour de son cercle moyen, multiplié par le nombre de tours que fera cette corde. Ainsi divisant la longueur entière de la corde qui doit couvrir la bobine, & qui a été supposée de 20 toises ou de 1440 pouces, par la longueur 78 $\frac{4}{7}$ pouces qu'il en faut pour faire un tour moyen de cette bobine ; on trouvera que les 1440 pouces de corde doivent faire

18 $\frac{1}{3}$ tours à peu de chose près, pour se rouler entièrement sur la bobine.

Chaque bobine doit donc être assez longue pour contenir 18 $\frac{1}{3}$ tours de corde d'un pouce de diamètre; & par conséquent, lorsqu'on voudra que tous les tours de la corde se touchent, il faudra donner 18 $\frac{1}{3}$ pouces de longueur au côté de cette bobine, en observant qu'il n'y ait que 17 $\frac{1}{3}$ pouces entre les axes des portions de corde dont les tours extrêmes seront formés.

La place que chaque corde doit occuper sur sa bobine étant déterminée, avec les rayons extrêmes de cette bobine, on a tout ce qu'il faut pour construire les bobines.

Fig. 108. On tirera une droite indéfinie *DG* pour servir d'axe aux bobines; & lui ayant mené une perpendiculaire *AC* de 14, 394 pouces pour représenter le plus grand rayon d'une bobine en y comprenant la moitié de l'épaisseur de la corde, on prendra sur cette perpendiculaire une partie *CF* de 10, 606 pouc., c'est-à-dire égale au plus petit rayon d'une bobine, en y comprenant la moitié de l'épaisseur de la corde.

Puis ayant mené par le point *F* une droite *FB* parallèle à *DG*, on prendra sur elle un point *B* qui soit éloigné du point *A* de 17 $\frac{1}{3}$ pouces, & l'on mènera la droite *BD* parallèle à *AC* ou perpendiculaire à *DG*. Enfin ayant décrit des points *A*, *B*, comme centres, deux cercles d'un pouce de diamètre, pour représenter les tours extrêmes de la corde sur la bobine, on leur mènera une tangente commune *HI* qu'on prolongera de quelques pouces vers *K*, & qu'on terminera vers *H* par une autre tangente *NH* au cercle *B*. Cela fait, la droite *HK* représentera

le rampant d'une bobine dont DE sera l'axe ; & si l'on veut que la corde ne fasse autour de sa bobine que les 18 $\frac{1}{3}$ tours qu'on a déterminés, il faudra l'attacher par un bout dans le fond de l'angle NHK formé par les deux tangentes NH, HK du cercle B.

Pour empêcher la corde de glisser sur la surface conique de la bobine, on terminera le petit bout de cette bobine par un bord élevé de quelques pouces, qu'on formera en hélice, c'est-à-dire comme un pas de vis qui auroit pour hauteur le diamètre de la corde. Et attendu qu'il est nécessaire que la corde ait un peu plus de longueur qu'il n'en faut pour descendre jusqu'à l'eau, afin de donner au seau la facilité de se remplir ; on ajoûtera au petit bout de la bobine de quoi placer au moins un tiers de tour de corde de plus qu'on ne l'a déterminé dans le cours de cette solution ; & au lieu d'attacher le bout de la corde en B, on l'arrêtera en quelque autre point O tel que BO soit au moins le tiers de la circonférence de la bobine.

Le Problème sera donc résolu, pour tirer deux pieds cubes d'eau à la fois d'un puits de 20 toises de profondeur, avec des seaux qui pèsent à vuide 40 livres, & une corde d'un pouce de diamètre dont chaque toise pèse 2 livres ; en faisant une roue de 12 pieds de diamètre, & en garnissant son axe de deux bobines formées en cone tronqué, dont les rayons extrêmes auront, l'un 14, 394 pouces, & l'autre 10, 606 pouces, en y comprenant la moitié de l'épaisseur de la corde. C. Q. F. T.

On a supposé dans la solution de ce Problème deux choses qui ne sont pas exactement vraies.

Fig. 107. *1°. On a supposé que le seau R qui est dans le fond du puits ou dans l'eau, agit de tout son poids sur la bobine de sa corde ; on a même supposé que l'eau contenue dans ce seau plongé tire sur la bobine avec 144 livres de force : ce qui n'est pas vrai ; car le seau qui est dans l'eau ne tire qu'avec l'excès de sa pesanteur sur celle du volume d'eau dont il occupe la place, & l'eau contenue dans le seau plongé ne tire point du tout la corde de son seau ; & n'agit point sur le tour. Mais le seau n'étant que quelques instans dans l'eau, on a cru qu'il étoit inutile d'avoir égard à cette circonstance qui demande que l'homme se dérange pour un moment seulement de la place qu'on lui a assignée dans la roue du tour.*

2°. On a supposé gratuitement que chacune des deux bobines devoit avoir la figure d'un cone tronqué, ce qui n'est pas encore vrai à la rigueur. Mais après avoir cherché la véritable figure que devoit avoir la bobine de chaque corde, j'ai trouvé qu'elle ne s'écartoit pas d'un septième de ligne de la figure du cone tronqué : c'est ce qui m'a déterminé à supposer aux bobines cette dernière figure qui est facile à faire, & qui approchera plus de la véritable figure qu'on devroit donner aux bobines, que toute autre qu'on pourroit faire exécuter par des ouvriers d'après des profils exacts de la meilleure figure.

SECONDE SOLUTION.

423. Lorsque pour résoudre le Problème proposé l'on veut employer les bobines dont on vient de déterminer les mesures dans la première Solution, il faut que le diamètre du puits soit plus grand que le double de la longueur d'une bobine, plus le diamètre

diamètre d'un seau garni de son armature. Mais il arrive souvent le contraire; & dans ce cas on peut faire des bobines plus courtes sur lesquelles les cordes feront plusieurs rangs de tours les uns sur les autres. Il est vrai qu'en se servant de ces bobines courtes, on perdra quelque chose de l'uniformité qu'on demandoit dans la puissance : mais on ne s'en écartera pas beaucoup, si l'on donne aux bobines les dimensions qu'on va déterminer.

Pour s'épargner la peine de répéter des calculs ennuyans, & se servir de ceux qui sont déjà faits, on prendra l'exemple du Problème où l'on a trouvé que les rayons extrèmes des bobines coniques doivent avoir l'un 14, 394 pouces, l'autre 10, 606 pouces, en y comprenant la moitié de l'épaisseur de la corde, ou dont le petit bout doit avoir à nu 10, 106 pouces de rayon, & le gros bout 14, 894 pouces de rayon en y comprenant le diamètre entier de la corde.

Ces mesures étant déterminées comme dans la première Solution, l'on construira deux bobines cylindriques dont le nu ait 10, 106 pouces de rayon; & on les fera de telle longueur qu'après avoir roulé sur elles 20 toises de corde d'un pouce de diamètre, le tout ensemble fasse un cylindre de 14, 894 pouces de rayon.

Comme le rayon du nu de la bobine doit être plus petit que le rayon de la bobine pleine, de 4, 788 pouces ou de 57 $\frac{1}{2}$ lignes à peu de chose près, il faudra mettre dans la bobine cinq rangs de corde les uns sur les autres, pour la grossir au point d'avoir un rayon de 14, 894 pouces. Ainsi il faudra faire la bobine de telle longueur qu'elle puisse contenir

20 toises de corde en cinq rangs de tours placés les uns sur les autres.

On pourroit objecter que la corde étant supposée d'un pouce de diamètre, cinq rangs de ses tours placés les uns sur les autres ne tiendront pas dans un espace de 57 $\frac{1}{2}$ lignes. Mais on peut répondre que d'espace en espace la corde d'un rang supérieur trouvera à se loger dans les angles des anneaux du rang inférieur, & que chaque rang n'augmentera pas d'un pouce le rayon de la bobine. Dans les expériences que j'ai faites, j'ai trouvé que cinq rangs de corde d'un pouce de diamètre ne grossissoient une bobine que de 110 lignes, c'est-à-dire que le rayon de la bobine n'étoit augmenté que de 55 lignes; au lieu qu'il auroit dû être augmenté de 60 lignes, si chaque rang de corde agrandissoit le rayon d'un pouce. Il est vrai que la corde dont je me servois n'étoit pas neuve, & que le service l'ayant amollie, la compression des tours les uns sur les autres pouvoit un peu l'aplatir. Mais quand même il faudroit 5 pouces ou 60 lignes d'espace pour placer cinq rangs de corde les uns sur les autres, il n'y auroit pas grand inconvénient : le pis aller seroit de compter 60 lignes au lieu de 57 $\frac{1}{2}$ lignes que l'on a pour l'augmentation du rayon de la bobine : les 2 $\frac{1}{2}$ lignes dont le rayon de la bobine seroit trop augmenté, ne causeroient pas une grande altération dans l'uniformité de l'action de la puissance, uniformité à laquelle on renonce pour avoir des bobines courtes dans lesquelles les cordes fassent plusieurs tours les uns sur les autres.

Le nombre des rangs de corde, qui doivent être les uns sur les autres dans une bobine, étant fixé à cinq, on cherchera combien il faut de corde d'un

pouce de diamètre, pour faire cinq tours concentriques, le premier étant sur une bobine de 10, 106 pouc. de rayon. Or comme l'axe d'une corde que l'on roule ne change point sensiblement de longueur, & que le premier tour de corde aura intérieurement 10, 106 pouces de rayon, de même que le cylindre qu'il embrassera; le premier cercle que formera l'axe de la corde aura 10, 606 pouces de rayon : & si l'on suppose que les rayons des quatre autres cercles augmentent continuellement d'un pouce, le tour supérieur qui sera le cinquième aura 14, 606 pouces de rayon, & la somme 25, 212 pouces de ces rayons extrêmes sera le diamètre du tour moyen de la corde; en sorte que si l'on multiplie ce diamètre par 5, le produit 126, 060 pouces sera la somme des diamètres des cinq tours de corde placés les uns dans les autres. Donc si l'on multiplie par $3 \frac{1}{7}$ la somme 126, 060 pouces de ces cinq diamètres, le produit 396, 188 pouces sera la longueur de la corde qui peut faire cinq tours concentriques les uns sur les autres, le premier étant sur une bobine de 10, 106 pouces de rayon à nu.

Ayant trouvé qu'il faut 396, 188 pouces de corde, pour faire dans la bobine cinq tours concentriques les uns sur les autres, on divisera la longueur entière de la corde qui est de 20 toises ou de 1440 pouces, par 396, 188; & le quotient $3 \frac{7}{11}$ qu'on trouvera, fera voir qu'il faudra faire chaque bobine assez longue pour recevoir $3 \frac{7}{11}$ tours de corde d'un pouce de diamètre, les uns auprès des autres. Mais comme $3 \frac{7}{11}$ tours s'arrangeroient trop difficilement les uns à côté des autres dans une bobine, on fera la bobine assez longue pour contenir quatre tours de corde les

uns à côté des autres; c'eſt-à-dire qu'on donnera 4 pouces de longueur à chaque bobine entre ſes joues.

La longueur de la bobine étant fixée à 4 pouces, au lieu de 3 $\frac{7}{11}$ pouces, la corde qui s'y roulera ne fera pas les uns ſur les autres cinq rangs entiers de 4 tours chacun, à moins qu'on ne faſſe quelque changement au rayon du nu de cette bobine.

Pour trouver le nouveau rayon du nu de la bobine, afin que la corde qui doit s'y rouler faſſe les uns ſur les autres cinq rangs de quatre tours, ou quatre fois cinq tours concentriques; on prendra d'abord le quart de la longueur de la corde qu'on ſuppoſera de 126 pieds au lieu de 120 pieds, afin d'avoir 6 pieds de reſte pour laiſſer au ſeau plus de liberté de ſe remplir. Or ce quart qui ſera de 31 $\frac{1}{2}$ pieds ou de 378 pouces, fournira cinq tours concentriques de corde roulés les uns ſur les autres; & la cinquiéme partie de ce quart, ſavoir 75, 6 pouces, ſera la longueur d'un tour moyen de la corde. Multipliant cette longueur par $\frac{7}{22}$, le produit 24 pouces $\frac{2}{3}$ ligne qu'on trouvera à peu de choſe près, ſera le diamètre d'un tour moyen, pris de milieu en milieu de l'épaiſſeur de la corde, & 12 pouces $\frac{1}{3}$ ligne en ſera le rayon.

Comme il y aura dans la bobine cinq rangs de corde les uns ſur les autres, & que les tours moyens ſeront par conſéquent dans le troiſième rang, il y aura 2 $\frac{1}{2}$ épaiſſeurs de corde depuis le nu de la bobine juſqu'au milieu de l'épaiſſeur de la corde du tour moyen. Ainſi eſtimant que les rayons des tours de corde placés les uns ſur les autres augmentent continuellement de 11 lignes au lieu de 12 lignes, à cauſe de l'aplatiſſement de la corde occaſionné par la compreſſion

des tours placés les uns sur les autres; il faudra pour avoir le rayon du nu de la bobine, retrancher 27 ½ lignes ou 2 pouces 3 ½ lignes, du rayon de 12 pouces ⅓ ligne qu'on a trouvé pour un tour moyen de la corde; & le reste 9 pouces 9 lignes sera à peu de chose près le rayon que doit avoir le nu de chaque bobine.

Pour construire les deux bobines, on fera donc un cylindre *ADGF* de 9 pouces 9 lignes de rayon, divisé en deux parties *ABCD*, *EFGH* dont chacune ait 4 pouces de longueur, par une rondelle *LM* qui lui soit fermement arrêtée; & l'on terminera ce cylindre par deux plateaux ronds *IK*, *NO*. Ces plateaux & la rondelle déborderont le cylindre de 5 pouces au moins; ce qui formera deux bobines *IKML*, *LMON* dans lesquelles les cordes des deux seaux pourront se rouler, en procurant à la puissance la plus grande uniformité qu'elle peut avoir dans le cas où l'on se sert de bobines cylindriques. Fig. 109.

424. *Au lieu d'employer deux bobines coniques ou cylindriques telles que celles dont on vient de fixer les mesures, on se contente souvent de creuser dans l'arbre de la roue une gorge* B F G *autour de laquelle on fait faire trois tours à la corde* A B F E *qui porte à ses extrémités les deux seaux.* Fig. 110.

Quoique la corde A B F E *ne soit arrêtée à aucun point fixe de la gorge* B F G, *les trois tours qu'on lui fait faire la rendent assez adhérente à la surface de cette gorge, pour l'empêcher de riper, malgré la supériorité du seau plein qui est à l'un de ses bouts sur le seau vuide qui est à l'autre bout.*

La corde A B F E *n'étant point arrêtée dans la gorge, à mesure que l'arbre tournera, & que la partie* A B

de la corde se roulera en élevant le seau plein S, l'autre partie FE *de la même corde se déroulera, & le seau vuide* R *descendra dans le puits pour s'y remplir.*

Comme les tours d'une corde qui se roule, se placent les uns à côté des autres, & forment une espéce d'hélice; si la corde ne se rouloit pas dans une gorge, elle s'éloigneroit continuellement de sa première position, & le plus souvent l'arbre de la roue ne seroit pas assez long, ou le puits ne seroit pas assez large, pour lui permettre ce mouvement. Mais la corde se roulant autour d'une gorge plus profonde à son milieu qu'à ses extrémités, les nouveaux tours qui seront plus éloignés du fond de la gorge, presseront les premiers faits & les obligeront de descendre dans le fond de cette gorge où ils se dérouleront; en sorte que les trois tours de corde ne sortiront jamais de la gorge.

On trouve dans cette construction du tour un avantage & une épargne, en ce que l'on n'a pas besoin pour les deux seaux de deux cordes qui descendent depuis le treuil jusqu'à l'eau du puits; & qu'il suffit d'employer une seule corde assez longue pour faire trois tours dans la gorge, & permettre à un seau R *attaché à l'une de ses extrémités, de descendre jusque dans l'eau du puits, pendant que le seau* S *attaché à son autre extrémité, sera suspendu à la hauteur de la mardelle. Mais l'épargne d'une corde n'est pas un avantage assez considérable, pour dédommager de deux défauts qui se trouveroient dans le tour, & dont l'un seroit d'autant plus grand que le puits seroit plus profond.*

*On a déjà parlé (*n°. 421*) du premier défaut qu'auroit ce tour, en faisant voir que dans la première moitié du temps que le seau plein emploieroit à monter,*

la puiſſance auroit à ſoûtenir, non ſeulement le poids de l'eau contenue dans ce ſeau, mais encore le poids d'une partie de la corde égale à la diſtance qui ſe trouveroit entre les deux ſeaux.

Le ſecond défaut de ce tour conſiſte en ce que, la corde ſe roulant autour de la gorge ſans en ſortir, les tours qu'elle fait ſont plus éloignés du fond de cette gorge, que ceux qui ſont précédemment faits & qui ſe déroulent; en ſorte que la corde du ſeau plein qui monte, ſe roule ſur une circonférence d'un plus grand diamètre que celle que la corde du ſeau vuide deſcendant abandonne: d'où il ſuit que la corde qui gliſſe continuellement vers le fond de la gorge, & qui ripe de temps en temps, n'élève pas le ſeau plein à chaque tour, d'une quantité auſſi grande que la circonférence ſur laquelle elle ſe roule. Or ce défaut eſt cauſe que la puiſſance eſt obligée de faire un effort plus grand que celui qu'elle feroit ſi la corde ſe rouloit ſur un cylindre, & que le ſeau plein montât à chaque tour d'une quantité égale à la longueur de la circonférence de ce cylindre.

On peut remédier au premier de ces défauts, en attachant aux fonds ou aux armatures des deux ſeaux, les deux bouts d'une chaîne IHL *dont la peſanteur ſoit égale à celle d'une corde de pareille longueur, & qui ſoit aſſez longue pour que ſon pli deſcende d'un ou deux pieds au deſſous de la ſurface de l'eau. Car la partie* BA *de la corde & celle* IH *de la chaîne qui ſeront d'un côté du treuil, ſeront de même poids que la partie* FE *de la corde & celle* LH *de la chaîne qui ſeront de l'autre côté du même treuil: & comme les deux ſeaux* S, R *avec leurs armatures ſont ſuppoſés de même peſanteur, la puiſſance n'auroit à élever que le poids de l'eau contenue dans le ſeau plein, ſi le tour*

n'avoit pas d'ailleurs le second défaut que l'on vient d'exposer.

Fig. 111. *Le second défaut peut être sauvé en employant deux cylindres parallèles* CD, MN *autour desquels la corde s'enveloppe en serpentant de l'un à l'autre. Pour empêcher les tours de corde de changer de place, on taille ou tourne sur les cylindres, de petites gorges dont chacune est capable de contenir un tour de corde. Ces petites gorges sont assez éloignées les unes des autres, pour que les différens tours que la corde fait en serpentant, ne se touchent point; & afin que les serpentemens soient plus réguliers, ou que l'obliquité de la corde qui passe d'un cylindre à l'autre soit la même dans tous les serpentemens, on fait en sorte que les gorges d'un cylindre soient vis-à-vis les intervalles des gorges de l'autre cylindre.*

Lorsqu'on veut élever de l'eau par le moyen d'un tour à deux cylindres, & que ce tour exige la force ou le poids de deux hommes, on applique une roue à chaque cylindre; mais lorsque l'ouvrage ne demande que la force d'un homme, & qu'on appréhende que le frottement de la corde sur le cylindre de la roue ne soit pas assez considérable pour obliger l'autre cylindre à tourner, on garnit les deux cylindres de deux roues dentées engrenées l'une dans l'autre, afin que le mouvement de l'un se communique sûrement à l'autre. Ces roues dentées doivent avoir des nombres de dents & des diamètres proportionnels à leurs cylindres, & doivent par conséquent être égales lorsque les cylindres sont égaux.

Quoique les deux cylindres sur lesquels la corde se roule en serpentant, sauvent le principal défaut qu'on a reconnu dans le cylindre unique à gorge, ils ne sont pas eux-mêmes sans inconvénient; & l'on ne doit point laisser ignorer que leurs pivots étant pressés contre leurs

paliers avec d'autant plus de force que la corde fait plus de tours, le frottement de ces pivots en devient aussi d'autant plus considérable, & par conséquent plus difficile à vaincre. Ainsi en abandonnant les bobines coniques ou cylindriques dont on a donné les mesures, pour se procurer un petit avantage du côté de la dépense des cordes, on tombe dans des défauts qui consommant une partie de la force motrice, obligent à tirer moins d'eau à la fois, ou à employer un agent plus puissant.

Remarque.

425. On a dit (*n*°. 422) qu'un homme, pour marcher commodément dans la roue d'un tour, doit y être placé de manière que l'inclinaison de l'endroit où il marche ne soit pas trop roide; & l'on a déterminé cette inclinaison, en fixant la partie *CD* du rayon horizontal *CA*, au bout de laquelle doit répondre verticalement le centre de gravité de l'homme, à la sixième partie de ce rayon. Ainsi l'homme agira par son poids sur le tour, comme s'il étoit appliqué à la tangente de la circonférence d'une roue égale à la sixième partie de celle dans laquelle il marche. Fig. 107.

Deux forces qui doivent produire le même effet sur une roue, devant être réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires menées du centre de la roue sur leurs directions; une force tangentielle qui seroit appliquée à la circonférence de la roue dans laquelle l'homme marche, & qui produiroit le même effet que le poids de l'homme appliqué perpendiculairement à la partie *CD* du rayon, ne seroit que la sixème partie du poids de l'homme, & ne seroit par conséquent que de 25 livres, en fixant

comme nous avons fait (*n°*. 422) celui de l'homme à 150 livres. Or cette force de 25 livres est celle à laquelle on a évalué l'action qu'un homme accoûtumé au travail, peut faire à bras sans interruption pendant une heure ou deux.

Quelques Méchaniciens assurent d'après des expériences, qu'un homme qui tire à l'épaule pendant une ou deux heures, ne peut appliquer que 25 livres de force; & quelques autres prétendent qu'il en peut appliquer jusqu'à 27 livres.

Dans les travaux des épuisemens, où l'on fait travailler des hommes pendant huit heures de vingt-quatre, en donnant à chaque relais quatre heures de repos après deux heures de travail continuel, ces hommes peuvent à peine emporter 25 livres de résistance.

On estime ordinairement qu'un cheval travaille autant que sept hommes, & qu'un âne emploie autant de force que deux hommes.



CHAPITRE II.

Du Tour ou Treuil composé, & des Roues dentées en général.

DÉFINITIONS.

426. LORSQU'UNE puissance *P* est appliquée à un point *B* de la circonférence de la roue d'un tour, & qu'une corde *CD* attachée au cylindre ou à la bobine de ce premier tour, tire sur la circonférence de la roue d'un second tour dont le cylindre reçoit une corde *FH* qui tire sur la circonférence de la roue d'un troisième tour ; & qu'on emploie ainsi de suite un nombre quelconque de tours, qui par le moyen des cordes se communiquent l'un à l'autre l'action de la puissance *P* ; l'assemblage de tous ces tours, en quelque nombre qu'ils puissent être, depuis deux inclusivement jusqu'à l'infini, s'appelle un *Tour composé* ou un *Tour multiplié*. Fig. 112.

On va voir que par le moyen de ces tours composés, on peut multiplier prodigieusement l'effet ou l'impression de la force de la puissance *P* ; c'est-à-dire que sans augmenter la puissance *P*, on peut la rendre capable de soûtenir en équilibre ou de surmonter un poids *R* d'une pesanteur prodigieuse.

Le tour *ACB* dont la circonférence de la roue est tirée immédiatement par la puissance *P*, se nomme *premier Tour* ; sa roue se nomme *première Roue* ; & son cylindre s'appelle *premier Cylindre*. Le tour *EFD* qui reçoit son mouvement immédiatement du premier tour par le moyen du cordon *CD*, s'appelle

second Tour, sa roue *seconde Roue*, & son cylindre *second Cylindre*. Le tour *GIH* qui reçoit son mouvement du second par le moyen de la corde *FH*, s'appelle *troisième Tour*, sa roue *troisième Roue*, & son cylindre *troisième Cylindre* : & ainsi des autres.

Comme la force d'une corde est dirigée suivant son axe, & que l'axe d'une corde roulée sur une roue ou sur un cylindre, est éloigné de leurs circonférences d'une quantité égale à son demi-diamètre; les diamètres des circonférences auxquelles sont appliquées les cordes, sont plus grands que les véritables diamètres des roues & des cylindres, de quantités égales aux diamètres des cordes roulées sur les circonférences de ces roues & de ces cylindres. Ainsi par diamètre d'une roue ou d'un cylindre, nous entendrons le diamètre propre de cette roue ou de ce cylindre, augmenté du diamètre de la corde roulée sur sa circonférence.

THÉOREME.

Fig. 112. 427. *Lorsqu'une puissance* P *appliquée à la roue d'un premier tour est dirigée suivant une tangente à la circonférence de cette roue, & qu'elle est en équilibre avec un poids* R *suspendu par une corde roulée sur le cylindre du dernier tour; la puissance* P *est au poids* R, *comme le produit des rayons de tous les cylindres est au produit des rayons de toutes les roues; c'est-à-dire que* $P : R :: AC \times EF \times GI : AB \times ED \times GH$.

DÉMONSTRATION.

Puisque la puissance *P* est en équilibre avec le poids *R*, le tour composé & tous les tours particuliers qui le composent sont en repos. Ainsi les

tensions des cordons appliqués à la roue & au cylindre de chaque tour sont en équilibre.

Les tensions des cordons BP, CD appliqués à la roue & au cylindre du premier tour, étant en équilibre, la puissance P ou la tension du cordon BP sera à la tension du cordon CD, comme AC est à AB (*n*°. 413). Ainsi en nommant K la tension du cordon CD, on aura . . $P : K :: AC : AB$.

Le second tour EFD étant aussi en équilibre, la tension K du cordon CD appliqué à sa roue, sera à la tension (qu'on nommera L) du cordon FH appliqué à son cylindre, comme le rayon du cylindre est au rayon de la roue; c'est-à-dire qu'on aura cette proportion . . . . $K : L :: EF : ED$.

Le troisième tour GIH étant pareillement en équilibre, la tension L du cordon FH appliqué à sa roue sera au poids R appliqué à son cylindre, comme le rayon de ce cylindre est au rayon de la roue; c'est-à-dire qu'on aura . . $L : R :: GI : GH$.

Multipliant par ordre toutes ces proportions dont chacune a pour premier terme le second terme de la précédente, on aura enfin cette proportion . . . . . $P : R :: AC \times EF \times GI : AB \times ED \times GH$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

428. Si l'on ne demandoit que le rapport qu'il y a entre la puissance P appliquée à la roue du premier tour, & la tension L du cordon FH appliqué au cylindre du second tour, on multiplieroit seulement par ordre les deux premières proportions que les deux premiers tours ont données; & l'on trouveroit Fig. 112.

$P : L :: AC \times EF : AB \times ED$; c'est-à-dire que la puissance appliquée à la roue du premier tour est à la tension ou à la force de la corde roulée sur le cylindre du second, comme le produit des rayons des cylindres de ces deux tours, est au produit des rayons de leurs roues.

Corollaire II.

Fig. 112. 429. Si l'on change l'arrangement des tours particuliers dont le tour composé est formé, si l'on démonte même les tours, & qu'on remette les cylindres à quelles roues l'on voudra; par exemple, si l'on met le cylindre du premier tour à la roue du troisième, le cylindre du troisième à la roue du second, & le cylindre du second à la roue du premier, on ne changera rien au rapport de la puissance *P* au poids *R*. Car puisqu'on se sert toûjours des mêmes roues & des mêmes cylindres; après qu'on aura varié comme on voudra l'arrangement des tours, & qu'on aura changé à volonté les cylindres de roues, les rayons des roues & des cylindres seront toûjours les mêmes. Ainsi le produit des rayons des roues ne changera point, & le produit des rayons des cylindres ne changera point non plus; & par conséquent il n'y aura rien de changé dans le rapport du produit des rayons des cylindres au produit des rayons des roues, qui est égal à celui de la puissance *P* au poids *R*.

Donc si l'on connoît les rayons de toutes les roues & de tous les cylindres d'un tour composé, il ne sera pas nécessaire de connoître l'arrangement des tours particuliers, ni à quelles roues appartiennent les cylindres, pour déterminer le rapport qu'il y aura

entre la puissance P appliquée à la première roue, & le poids R appliqué au dernier cylindre.

Par exemple, si l'on sait en général que le tour composé a trois roues dont les trois rayons sont représentés par les nombres . . . . . . 10, 12, 15, & trois cylindres dont les rayons sont représentés par les nombres . . . . 1, $1\frac{1}{2}$, 2, sans connoître à quelles roues appartiennent les trois cylindres, & sans s'informer à laquelle des roues & auquel des cylindres sont appliqués la puissance P & le poids R; on fera le produit des trois nombres 1, $1\frac{1}{2}$, 2 proportionnels aux rayons des trois cylindres, & le produit des trois nombres 10, 12, 15 proportionnels aux rayons des trois roues : & comme ces deux produits seront 3 & 1800, l'on aura $P : R :: 3 : 1800$, ou (en divisant les deux derniers termes de cette proportion par 3) $:: 1 : 600$; en sorte que le rapport de la puissance P au poids R sera connu.

Remarque.

430. On doit remarquer dans ce Corollaire, que si les cordes BP, CD, FH, IR ne sont pas de la même grosseur, on ne pourra pas changer l'arrangement des tours ou des cylindres, sans changer le rapport de la puissance P au poids R. Car alors les diamètres augmentés par les diamètres inégaux des cordes, ne seront pas toûjours les mêmes dans tous les arrangemens qu'on pourra donner aux tours ou à leurs parties : en voici un exemple. Fig. 112.

Supposons que les roues de tous les tours & leurs cylindres étant nus, on trouve

dans le premier tour $AB = 72$ pouces, $AC = 12$ pouces;
dans le second tour $ED = 60$ " $EF = 9$
dans le troisième tour $GH = 64$ $GI = 8$

Supposons aussi la corde BP de $\frac{1}{2}$ pouce de diamètre,
la corde CD de $\frac{3}{4}$ de diamètre,
la corde FH de 1 de diamètre,
la corde IR de $1\frac{1}{4}$ de diamètre.

Lorsque chaque tour sera garni de ses cordes, & que chaque rayon de roue & de cylindre sera augmenté du demi-diamètre de la corde qui lui sera appliquée;

le rayon AB deviendra $= 72\frac{1}{4}$ ponc., le rayon $AC = 12\frac{3}{8}$ pouc.
le rayon ED $= 60\frac{3}{8}$, le rayon $EF = 9\frac{1}{2}$,
le rayon GH $= 64\frac{1}{2}$, le rayon $GI = 8\frac{5}{8}$,

Les rayons des trois roues étant ainsi augmentés des demi-diamètres de leurs cordes, leur produit sera de $281355\frac{3}{64}$; & le produit des rayons de leurs cylindres augmentés aussi des demi-diamètres de leurs cordes, sera de $1013\frac{125}{128}$. Ainsi l'on aura $R : P :: 281355\frac{3}{64} : 1013\frac{125}{128}$.

Mais si l'on change l'arrangement des tours en mettant le second à la place du troisième, le troisième à la place du second, & laissant le premier à sa place; lorsque les tours seront nus,

$$\text{on aura}\begin{cases} AB = 72 \text{ pouces}, & AC = 12 \text{ pouces}, \\ ED = 64, & EF = 8. \\ GH = 60, & GI = 9, \end{cases}$$

Et les diamètres des quatre cordes BP, CD, FH, IR étant encore supposés de $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$ pouces; lorsque tous les tours seront garnis de leurs cordes, on

on aura $\begin{cases} AB = 72\frac{1}{4}\text{ pouces}, & AC = 12\frac{3}{8}\text{ pouces}, \\ ED = 64\frac{3}{8}, & EF = 8\frac{1}{2}, \\ GH = 60\frac{1}{2}, & GI = 9\frac{5}{8}. \end{cases}$

Cela posé, le produit des rayons des roues augmentées des demi-diamètres de leurs cordes, sera $281391\frac{11}{64}$; & le produit des rayons des cylindres augmentés aussi des demi-diamètres de leurs cordes, sera $1012\frac{55}{128}$. Ainsi l'on aura (*n*°. 427) $R : P :: 281391\frac{11}{64} : 1012\frac{55}{128}$.

Or ces deux derniers nombres $281391\frac{11}{64}$, $1012\frac{55}{128}$, qu'on trouve pour le rapport du poids *R* à la puissance *P* dans le nouvel arrangement des tours, n'étant pas en même raison que les deux nombres $281355\frac{3}{64}$, $1013\frac{125}{128}$ qu'on a trouvés pour le rapport du poids *R* à la puissance *P* dans le premier arrangement des tours; le poids *R* & la puissance P ne seront pas en même rapport dans ces deux arrangemens différens de tours, si les cordes ne sont pas de même diamètre.

THÉOREME.

431. *Soient tant de tours qu'on voudra dont les roues soient représentées par les cercles* S, T, V, &c. *& les cylindres par les cercles* X, Y, Z, &c. *Si le cylindre de chaque tour, excepté le dernier* Z *où le poids* R *est appliqué, touche la roue d'un autre tour; & que par les attouchemens des cylindres & des roues, la puissance* P *appliquée à la circonférence de la première roue, communique son impression d'un tour à l'autre suivant quelles directions on voudra; lorsque le poids* R *& la puissance* P *seront en équilibre, ce poids & cette* Fig. 113.

puissance seront en même rapport que le produit des rayons de toutes les roues & celui des rayons de tous les cylindres.

DÉMONSTRATION.

Que l'on joigne les centres *A*, *F*, *K*, &c. des tours par des droites *AF*, *FK*, &c. Comme les centres des tours sont ceux des cercles qui représentent les roues & les cylindres, les droites *AF*, *FK*, &c. passeront par les points *C*, *H*, &c. où les cylindres toucheront les roues; en sorte que *AC*, *FH*, *KL*, &c. seront les rayons des cylindres, & *AB*, *FC*, *KH*, &c. seront les rayons des roues. Ainsi il faut démontrer que $P : R :: AC \times FH \times KL : AB \times FC \times KH$.

Supposons que le premier cylindre *X* qui touche la seconde roue *T*, lui communique suivant une direction quelconque *DC* l'impression qu'il a reçue de la puissance *P*: la roue *T* recevra cette impression suivant la même direction; c'est-à-dire que la direction *DC* de la force communiquée par le cylindre *X*, & la direction *CE* de la force reçue par la roue *T*, seront dans une même droite *DCE*.

Soit nommée *C* la force communiquée par le cylindre *X* à la roue *T* par le moyen de l'attouchement *C*. Si du centre *A* du premier tour on mène *AD* perpendiculairement sur *DCE*; *BAD* pourra être considéré comme un levier droit ou coudé appuyé en *A*, & aux extrémités *B*, *D* duquel la puissance *P* & la force *C* seront appliquées perpendiculairement. Ainsi tout étant en équilibre, on aura (*n°.* 355) $P : C :: AD : AB$.

Nommant *H* la force communiquée par le tambour *Y* à la roue *V* au moyen du point d'attouche-

ment H; & que cette communication se fasse suivant quelle direction GHI l'on voudra : si du centre F du second tour on mène des perpendiculaires FE, FG sur les directions DE, GI des deux forces C, H; EFG pourra être considéré comme un levier coudé appuyé en F, & aux extrémités E, G duquel sont appliquées perpendiculairement deux forces C, H en équilibre. Ainsi l'on aura (n°. 355) $C : H :: FG : FE$.

Du centre K du tour suivant soient tirées des perpendiculaires KI, KL aux directions GHI, LR de la force H & du poids R; on pourra aussi regarder IKL comme un levier coudé appuyé en K, & tiré à ses extrémités I, L par la puissance H & le poids R en équilibre. Ainsi l'on aura $H : R :: KL : KI$.

Multipliant par ordre les trois proportions qu'on vient de trouver, on aura

$P : R :: AD \times FG \times KL : AB \times FE \times KI$.

Mais DCE & ACF étant deux lignes droites, & les deux droites AD, FE étant perpendiculaires sur DE, & par conséquent parallèles; les deux triangles ADC, FEC seront semblables, & donneront . . . . $AD : FE :: AC : FC$.

Les deux lignes GHI, FHK étant aussi droites, & les droites FG, KI étant perpendiculaires à GI, les triangles FGH, KIH seront aussi semblables, & donneront . . . . $FG : KI :: FH : KH$.

Enfin . . . . $KL : AB :: KL : AB$.

Donc en multipliant ces trois proportions par ordre, on aura

$AD \times FG \times KL : AB \times FE \times KI :: AC \times FH \times KL : AB \times FC \times KH$.

Ainsi puisque $P : R :: AD \times FG \times KL : AB \times FE \times KI$, on aura aussi . . . $P : R :: AC \times FH \times KL : AB \times FC \times KH$.

C'est-à-dire que le poids *R* & la puissance *P* sont en même rapport que le produit des rayons de toutes les roues, & celui des rayons de tous les cylindres. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 114. 432. Si l'on n'avoit que deux tours, c'est-à-dire deux roues *S*, *T* & deux cylindres *X*, *Y*; il est évident que le poids *R* appliqué à la surface du second cylindre seroit à la puissance *P* appliquée à la circonférence de la première roue, comme le produit $AB \times FC$ des rayons des deux roues seroit au produit $AC \times FG$ des rayons des deux cylindres.

Cette proportion, qui n'est qu'une suite naturelle du dernier Théorème, peut être démontrée comme il suit.

On a prouvé dans le dernier Théorème que } $P : C :: AD : AB$,

& que . . . . $C : R :: FG : FE$.

Ainsi en multipliant par ordre, on aura } $P : R :: AD \times FG : AB \times FE$.

Mais on a prouvé aussi que . . . . . } $AD : FE :: AC : FC$;

& . . . . $FG : AB :: FG : AB$.

Ainsi en multipliant ces deux dernières proportions par ordre, on aura

$AD \times FG : AB \times FE :: AC \times FG : AB \times FC$.

Donc puisque $P : R :: AD \times FG : AB \times FE$.

on aura aussi... $P : R :: AC \times FG : AB \times FC$.

Corollaire II.

433. Donc la circonférence d'une roue & celle d'un cylindre ont la même force tangentielle, c'est-à-dire que leurs circonférences tournent avec la même force, lorsque la force de l'un se communique à l'autre par leur simple attouchement. Fig. 114.

Pour le prouver, supposons que la première roue *S* & son cylindre *X* ont le même rayon, ou que la puissance *P* est appliquée immédiatement à la circonférence du cylindre *X* suivant une tangente à cette circonférence; & que le cylindre *Y* où est appliqué le poids *R* ait aussi le même rayon que sa roue *T*: on aura toûjours $P : R :: AC \times FG : AB \times FC$.

Or on suppose $AC = AB$ & $FG = FC$. Ainsi $AC \times FG = AB \times FC$; & par conséquent $P = R$.

Mais la puissance *P* étant appliquée à la circonférence du cylindre *X* suivant une direction tangente à cette circonférence, est la force tangentielle avec laquelle ce cylindre tourne: & le cylindre *Y* étant de même rayon que la roue *T*, & se confondant par conséquent avec cette roue, le poids *R* appliqué à la circonférence du cylindre pourra être considéré comme appliqué à la circonférence même de la roue *T*, & sera par conséquent la force tangentielle avec laquelle la circonférence de cette roue tournera.

Donc puisqu'on a trouvé $P = R$, il faut conclurre que la circonférence de la roue & celle du cylindre tournent avec la même force tangentielle, lorsque la force se communique de l'un à l'autre par leur attouchement.

Remarque.

434. On doit remarquer qu'on a supposé, comme on le devoit, la force communiquée dans l'attouchement d'un cylindre & d'une roue dirigée suivant une ligne quelconque; parce que le cylindre & la roue ne s'entraînent que par une espèce d'engrénage insensible de leurs parties, & qu'on ne sait point suivant quelle direction les parties engrénées se poussent : mais quelle que soit cette direction, l'on a démontré que la force passe du cylindre à la roue & de la roue au cylindre, comme si la communication se faisoit suivant une tangente commune à la roue & au cylindre; car on vient de faire voir que la circonférence de la roue & celle du cylindre tournent avec la même force tangentielle.

Si la communication de la force d'un tour à l'autre se faisoit par des cordes dont chacune fût roulée sur une roue & un cylindre; comme chaque corde auroit une direction tangentielle à la roue & au cylindre qu'elle envelopperoit, & seroit également tendue dans toutes ses parties, il est évident que la force se communiqueroit d'un tour à l'autre suivant une tangente commune à la circonférence du cylindre de l'un & de la roue de l'autre, & que la circonférence de la roue & celle du cylindre enveloppées par la même corde, tourneroient avec la même force. On trouveroit aussi (n°. 427) que la puissance P seroit au poids R, comme le produit des rayons des cylindres seroit au produit des rayons des roues. Ainsi l'impression de la puissance P sur le poids R par le moyen des tours composés, sera la même, soit que la force se communique d'un tour à l'autre

par des cordes, soit qu'elle se communique par l'attouchement des cylindres & des roues.

Il y a cependant une grande différence entre les tours composés qui se communiquent la force par les cordes, & ceux qui se la communiquent par l'attouchement des cylindres & des roues; en ce que la force se communiquera infailliblement d'un tour à l'autre par le moyen des cordes, & qu'on ne sera pas sûr de la communiquer par l'attouchement mutuel des cylindres & des roues. Car le tour qui doit être entraîné peut faire une si grande résistance, que le frottement virtuel par lequel la force doit se communiquer ne sera pas capable de le faire tourner; en sorte que la circonférence du cylindre ou de la roue glissera sur celle de la roue ou du cylindre qu'elle devroit entraîner.

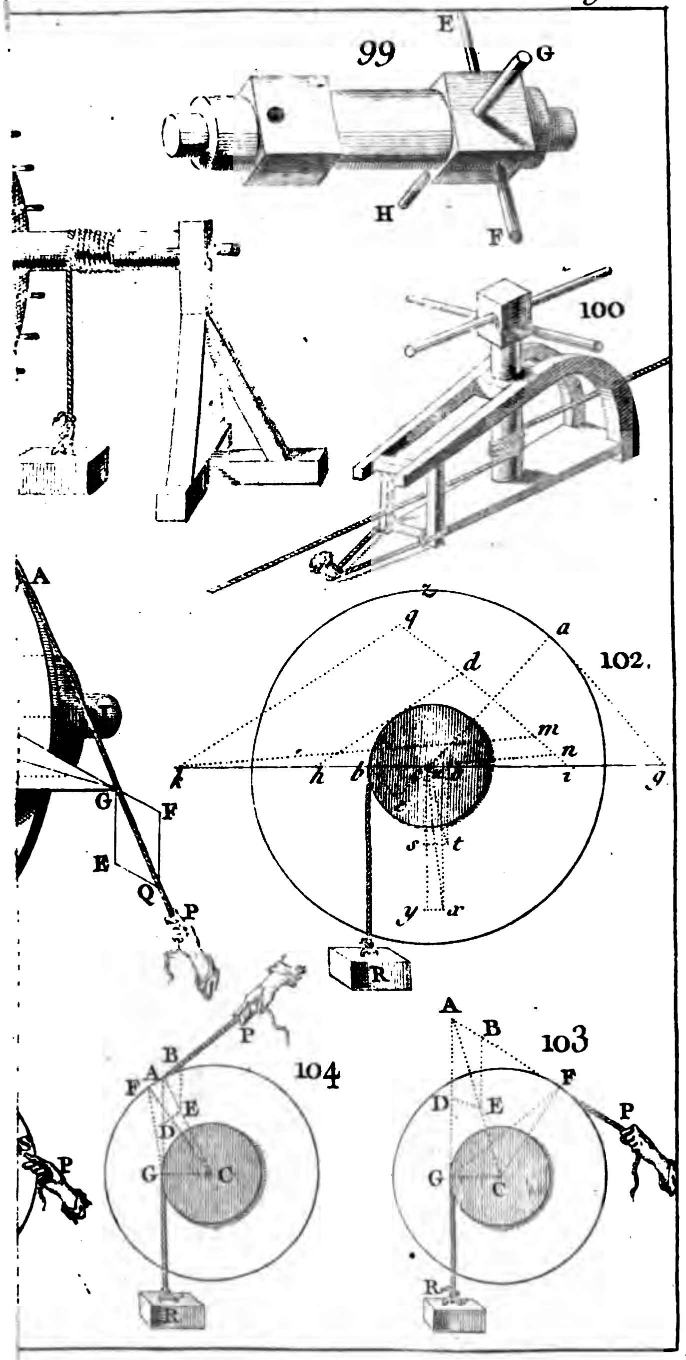
Il y a encore une différence entre les tours composés qui se communiquent la force par des cordes, & ceux qui se la communiquent par l'attouchement; en ce que dans les premiers il ne faudra point prendre les rayons propres des roues & des cylindres pour composer le rapport du poids *R* à la puissance *P*, & qu'il faudra que chaque rayon soit augmenté du demi-diamètre de la corde qui lui sera appliquée; au lieu que dans les derniers, il faudra prendre les vrais rayons des roues & des cylindres pour composer le même rapport.

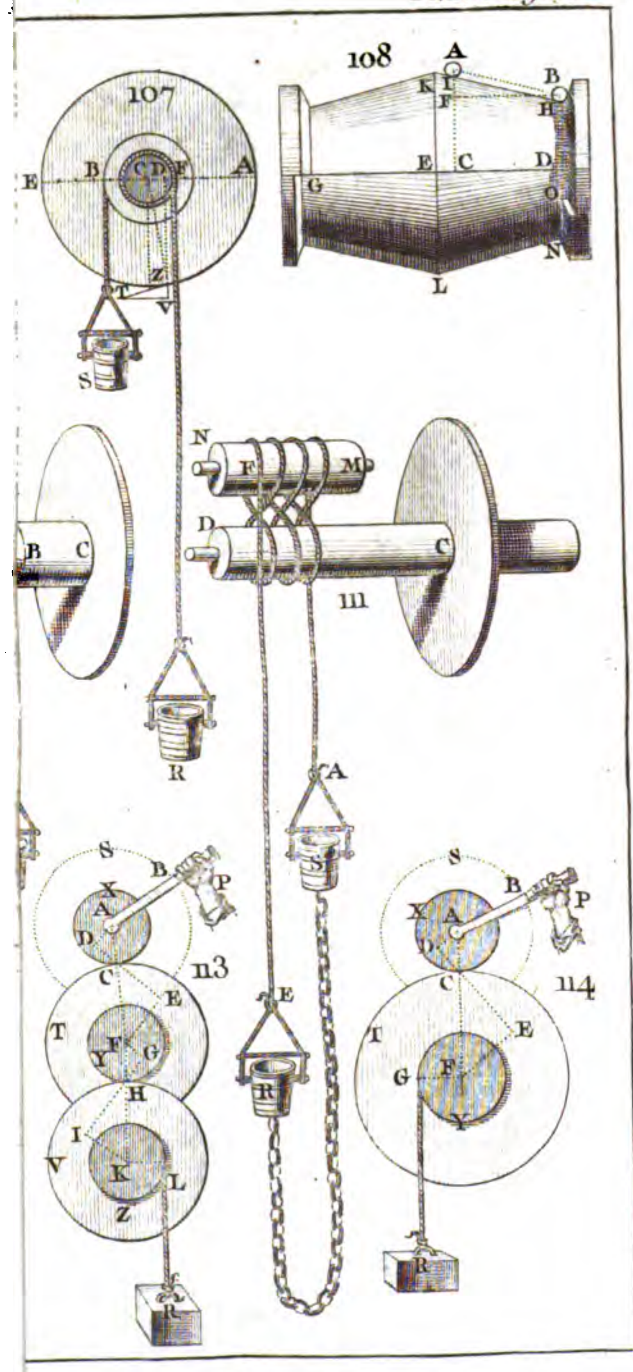
Dans les machines on ne fait point communiquer la force d'un tour à l'autre par des cordes ni par le simple attouchement des cylindres & des roues: mais on fait des dents aux circonférences des roues & des cylindres; & les dents des unes s'engrénant dans

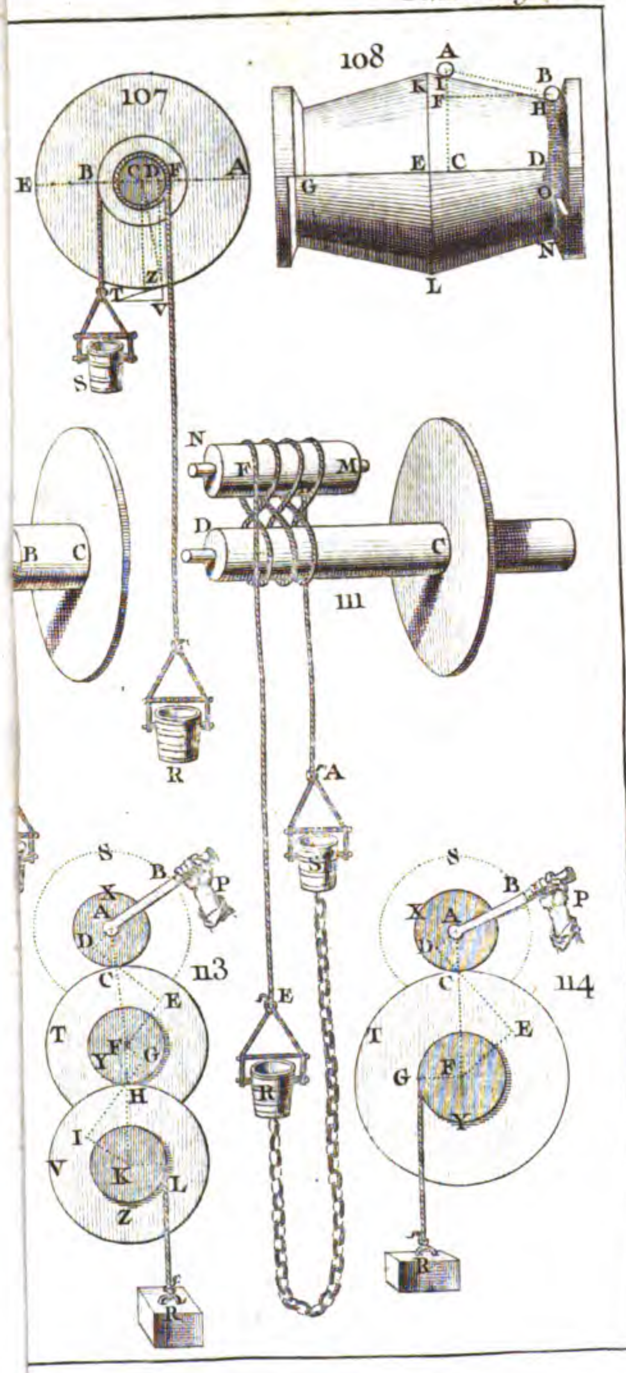
celles des autres, la force ſe communique infailliblement d'un tour à l'autre depuis le premier juſqu'au dernier.

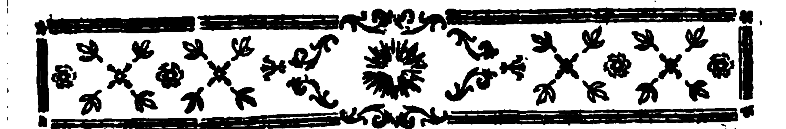
On verra dans le Livre dixième quelle eſt la figure la plus convenable qu'on peut donner aux dents des roues & des cylindres, pour que la force ſe communique d'un tour à l'autre avec la plus grande uniformité.




99
E
G
H
F
100
A
G
F
E
Q
P
z
q
a
102.
d
m
n
k
h
b
i
g
s
t
y
x
R
A
B
103
D
E
F
P
G
C
R
104
B
A
F
E
D
G
C
P
R


107
E
B
C
D
F
A
Z
T
V
S
108
A
B
K
I
F
H
E
C
D
G
O
N
L
N
F
M
D
B
C
C
111
R
A
S
E
R
S
B
P
X
A
D
113
C
E
T
F
Y
G
H
I
V
K
L
Z
R
S
B
P
X
A
D
C
114
T
E
G
F
Y
R


107
108
111
113
114



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE SEPTIEME.

Des Poids soûtenus sur des surfaces inclinées.

Définitions.

435. Nous avons déjà dit qu'une ligne droite suivant laquelle l'action de la pesanteur est dirigée, se nomme *Ligne verticale.*

Un plan qui passe par une ligne verticale, ou dans lequel une ligne verticale peut être tracée, s'appelle *Plan vertical*; & un plan auquel une ligne verticale est perpendiculaire, se nomme *Plan horizontal.* Enfin un plan qui n'est ni vertical ni horizontal, s'appelle *Plan incliné.*

L'inclinaison d'un plan *ABCD* se mesure par l'angle qu'il fait avec un plan horizontal *FBCE*: & comme un angle formé par deux plans *ABCD*, *FBCE* a la même mesure qu'un angle rectiligne *MNO* compris entre deux droites *NM*, *NO* tirées dans ces plans par un même point *N* de leur section commune *BC* perpendiculairement à cette section, Fig. 115.

l'inclinaison du plan *ABCD* est égale à l'angle *MNO*, & a par conséquent même mesure que cet angle.

Les deux droites *NM*, *NO* étant perpendiculaires à la section commune *BC* des deux plans *ABCD*, *FBCE*; cette section commune *BC* est réciproquement perpendiculaire aux deux droites *NM*, *NO*, & est par conséquent aussi perpendiculaire au plan de l'angle *MNO* : d'où il suit que les deux plans *ABCD*, *FBCE* qui passent par la droite *BC*, sont perpendiculaires au plan de l'angle *MNO*, & que le plan de cet angle est réciproquement perpendiculaire aux deux plans *ABCD*, *FBCE*. Or le plan *FBCE* étant supposé horizontal, celui de l'angle *MNO* qui lui est perpendiculaire, est vertical.

Comme on démontrera dans ce Livre qu'un point pesant quelconque *M* qui seroit placé sur un plan incliné *ABCD*, descendroit en parcourant sur ce plan une droite *MN* perpendiculaire à la section *BC* du même plan avec un plan horizontal *FBCE*; & qu'on ne doit considérer les plans inclinés que par rapport aux directions des forces qui peuvent faire descendre les corps ou les points pesans le long de ces plans; lorsqu'un corps ou point pesant *M* sera placé sur un plan incliné, on ne représentera de ce plan que la droite *MN* tirée de l'appui *M* du corps ou du point pesant perpendiculairement sur la section commune *BC* du même plan *ABCD* avec un plan horizontal *FBCE*.

L'angle *MNO* étant dans un plan vertical, la droite *MO* qu'on mènera dans ce plan perpendiculairement à sa rencontre *NO* avec un plan horizontal *FBCE*, sera perpendiculaire à ce plan horizontal (*Géom. n°.* 412), & sera par conséquent verticale.

On considère trois choses dans un plan incliné ; sa longueur, sa hauteur & sa base. Une droite *MN* tirée dans un plan incliné perpendiculairement à sa rencontre *BC* avec un plan horizontal *FBCE*, s'appelle la *longueur* du plan incliné ; la droite *MO* tirée dans le plan de l'angle *MNO* perpendiculairement à son côté horizontal *NO* s'appelle la *hauteur* du plan incliné ; & la droite horizontale *NO* terminée par la longueur & la hauteur du plan incliné, se nomme la *base* de ce plan : en sorte que la longueur *MN*, la hauteur *MO*, & la base *NO* d'un plan incliné, forment ensemble dans un plan vertical un triangle rectangle *MON* dont un côté *MO* est vertical, & l'autre côté *NO* est horizontal. Ainsi lorsqu'il sera question de représenter un plan incliné, on tracera un triangle rectangle *MON* dont les côtés *MO*, *NO* adjacens à l'angle droit seront l'un vertical, l'autre horizontal.

Les plans inclinés ne sont pas les seules surfaces sur lesquelles on puisse soûtenir des poids, & l'on peut retenir des corps pesans en équilibre sur des surfaces courbes quelconques : mais chaque partie infiniment petite d'une surface courbe sur laquelle un corps s'appuie, pouvant être regardée comme un petit plan, on imagine que cette petite partie, qui est la seule à laquelle on doive avoir égard par rapport au corps appuyé, est continuée jusqu'à un plan horizontal. Ainsi les parties des surfaces courbes qui servent d'appui aux corps se réduisent à des plans inclinés dont on considère les longueurs, les hauteurs & les bases.

Les points sur lesquels les corps s'appuient se nomment les *bases* de ces corps.

Lorsqu'un corps touche un plan en plusieurs points, on imagine un polygone dont les angles sont placés à plusieurs de ces points pris à volonté, & ce polygone s'appelle aussi la *base* du corps sur le plan.

Ce Livre sera divisé en trois Chapitres : dans le premier on parlera d'un corps pesant retenu en équilibre sur un plan ; dans le second l'on traitera d'un corps pesant soûtenu en équilibre par plusieurs plans ; & dans le troisième il s'agira des corps pesans qui se retiennent mutuellement en équilibre sur des plans.

CHAPITRE PREMIER.

D'un corps pesant retenu en équilibre sur un plan.

THÉOREME.

Fig. 116 & 117. 436. *Lorsqu'un corps s'appuie sur un point* Q *d'un plan quelconque* A B C D, *& qu'il est poussé vers ce point* Q *par une force dirigée suivant une perpendiculaire* P Q *à ce plan ; il demeure immobile, & par conséquent en équilibre.*

Démonstration.

La direction P Q de la force qui pousse le corps, étant perpendiculaire au plan *A B C D*, est perpendiculaire à toutes les lignes Q *R*, Q *S*, Q *T*, &c. qu'on peut mener dans ce plan par le point Q, & par conséquent elle est semblablement disposée par rapport à toutes ces lignes. Il n'y a donc point de raison pour que le corps *P* se meuve plutôt suivant Q *R* ou Q *S* ou Q *T*, que suivant toute autre ligne du même

plan *ABCD*: ainsi ce corps ne sera déterminé à se mouvoir d'aucun côté, & restera par conséquent immobile sur le plan *ABCD*. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

437. Donc un corps appuyé par un seul point Q sur une surface courbe, restera immobile, lorsque la direction *PQ* de la force qui le poussera, passera par le point d'appui Q, & sera perpendiculaire au plan *MN* qui touchera cette surface courbe au point Q. Fig. 118 & 119.

Car un plan qui touche une surface courbe se confond avec elle au point d'attouchement. Ainsi un corps appuyé par un point sur une surface courbe, doit être considéré comme s'il étoit placé sur le plan qui touche cette surface courbe au point d'appui Q, & se trouve par conséquent dans le cas d'un corps placé comme dans le Théorème.

On ne considère ici les corps placés sur des surfaces courbes, que dans le cas où ils touchent ces surfaces en un seul point : parce qu'un corps qui touche une surface courbe en plusieurs points, doit être considéré comme un corps placé sur plusieurs plans différemment inclinés, & que, dans ce premier Chapitre, on ne prétend point examiner ce qui arrive lorsqu'un corps est soûtenu par plusieurs plans.

COROLLAIRE II.

438. Un corps animé par la seule force de sa pesanteur restera donc immobile, lorsqu'il sera placé sur un plan horizontal, & que la verticale *PQ* menée par son centre de gravité *P* passera par le point Q ou par quelqu'un des autres points qui lui Fig. 116.

serviront d'appui. Car la pesanteur du corps étant censée réunie à son centre de gravité *P*, poussera ce corps suivant la verticale *P* Q dans laquelle on suppose le point d'appui Q ; & comme la verticale *P* Q sera perpendiculaire au plan horizontal, le corps placé sur ce plan restera immobile (*n°*. 436).

Fig. 118. Par la même raison un corps qui n'aura point d'autre force que sa pesanteur, restera immobile, lorsqu'il s'appuiera par un seul point sur une surface courbe, que le plan qui touchera la surface courbe en ce point sera horizontal, & que la verticale menée par le centre de gravité *P* du corps, passera par ce même point d'appui.

Corollaire III.

Fig. 117. 439. Donc un corps pesant restera immobile sur un plan incliné, si on lui applique une force étrangère telle que la résultante de cette force & de la pesanteur propre du corps soit perpendiculaire à ce plan incliné, & passe par un point de la base du corps sur ce plan. Car la force résultante de la pesanteur propre d'un corps & d'une force étrangère quelconque appliquée à ce corps, peut être considérée comme une force unique qui pousse le corps vers le plan incliné : & comme on suppose que la direction de cette force est perpendiculaire au plan incliné, & passe par un point d'appui, c'est-à-dire par un point de la base du corps sur ce plan, ce corps est dans le cas de celui du Théorème, & doit par conséquent demeurer immobile sur le plan incliné *ABCD*.

Fig. 119. Il en sera de même d'un corps placé sur une surface courbe : si la résultante de sa pesanteur & de

la force étrangère qu'on lui appliquera, passe par un point d'appui du corps, & se trouve perpendiculaire au plan tangent qu'on mènera par ce point d'appui, le corps pesant sera en équilibre.

THÉOREME.

440. *Un corps* P *étant sollicité à se mouvoir par une force dirigée suivant une droite* PQ *oblique à un plan* ABCD *sur lequel il est placé, & qu'il touche en* Q; *si d'un point quelconque* I *de la direction de la force qui pousse ce corps, l'on mène une perpendiculaire* IK *au plan* ABCD, *& que du point* K *où cette perpendiculaire rencontre ce plan, l'on mène une droite* KQN *par le point* Q *où la direction de la force rencontre le même plan, le corps* P *se mouvra sur le plan* ABCD *suivant la droite* KQN. Fig. 126.

DÉMONSTRATION.

Par les deux points *I*, *Q* soient menées des parallèles *IH*, *QH* aux deux droites *KQ*, *IK*: le quadrilatère *IKQH* sera un parallélogramme qui aura pour diagonale une partie de la direction de la force appliquée au corps *P*; ainsi en représentant cette force par la diagonale *IQ* de ce parallélograme, on pourra (*n°.* 230) la supprimer, & prendre à sa place deux autres forces représentées par les côtés contigus *HQ*, *KQ* du même parallélogramme.

Or *HQ* étant perpendiculaire au plan *ABCD* aussi-bien que sa parallèle *IK*, la force représentée par cette ligne *HQ* ne pourra mouvoir le corps *P* d'aucun côté (*n°.* 436), & sera totalement détruite par la résistance du plan.

Donc de la force appliquée au corps *P*, représentée par la droite *IQ* oblique au plan *ABCD*, & décomposée en deux forces *HQ*, *KQ*, il ne restera que la force représentée par *KQ*, dirigée suivant le plan *ABCD*; & comme rien n'empêchera le corps *P* de suivre la direction de cette force, le corps *P* se mouvra suivant la droite *KQN*. C. Q. F. D.

Corollaire I.

441. Donc un corps appuyé sur un seul point d'une surface courbe, ne restera pas immobile, si la direction de la force qui le poussera n'est pas perpendiculaire au plan qui touchera la surface courbe au point d'appui. Car un corps appuyé sur un point d'une surface courbe, doit être considéré comme s'il étoit placé sur un plan qui touche la surface courbe en ce point.

Corollaire II.

442. Donc si un corps placé sur un plan reste immobile; la direction de la force simple ou composée de plusieurs autres, qui poussera ce corps, sera perpendiculaire à ce plan, & passera par un des points de la base du corps sur ce plan.

Car 1°. si la direction de la force appliquée au corps n'étoit pas perpendiculaire au plan, le corps ne resteroit point immobile (*n*°. 440).

2°. Si la direction de la force ne passoit pas par un point de la base du corps sur le plan, le corps n'auroit point d'appui dans la direction suivant laquelle il seroit poussé; ainsi il obéiroit à la force qui lui seroit appliquée, & ne seroit par conséquent pas immobile.

Par

Par la même raison, lorſqu'un corps appuyé ſur un ſeul point d'une ſurface courbe reſtera immobile, la direction de la force ſimple ou composée qui pouſſera ou tirera ce corps, paſſera par le point d'appui, & ſera perpendiculaire au plan qui touchera la ſurface courbe en ce point.

COROLLAIRE III.

443. Lorſqu'un corps peſant placé ſur un plan reſtera immobile ſans être retenu par aucune puiſſance étrangère, la verticale menée par le centre de gravité de ce corps ſera perpendiculaire à ce plan, & paſſera par un point de la baſe du corps ſur ce plan : ainſi ce plan ſera horizontal par rapport au corps. Fig. 116.

Il en ſera de même lorſqu'un corps peſant appuyé ſur un ſeul point d'une ſurface courbe reſtera immobile : le plan qui touchera la ſurface courbe au point d'appui ſera horizontal par rapport à ce point, & la verticale menée par le centre de gravité du corps paſſera par ce même point.

On doit remarquer que dans la rigueur géométrique un plan ne peut être horizontal que dans un ſeul point ; parce que du centre de la terre on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire ſur un plan, & qu'un plan n'eſt horizontal que par rapport à la ligne qui lui eſt menée perpendiculairement par le centre de la terre. Ainſi dans la rigueur géométrique, un corps qui n'eſt animé que par la force de ſa peſanteur ne doit demeurer immobile que ſur un ſeul point d'un plan ; puiſqu'il n'y a dans ce plan qu'un ſeul point par lequel on puiſſe mener une verticale qui lui ſoit perpendiculaire.

THÉOREME.

Fig. 121. 444. *Lorsqu'une puissance* R *retient un corps pesant en équilibre sur un plan incliné* ABCD; *cette puissance, la pesanteur de ce corps réunie à son centre de gravité* P, *& la résultante de ces deux forces, ont leurs directions* IR, IP, IK *dans un même plan vertical perpendiculaire au plan incliné* ABCD.

DÉMONSTRATION.

Puisque le corps pesant est en équilibre sur le plan incliné *ABCD*, la force qui résultera à ce corps en vertu de sa pesanteur & de la puissance *R*, doit être dirigée suivant une droite *IK* perpendiculaire à ce plan (*n°*. 442) : & comme deux forces composantes sont toûjours avec leur résultante dans un même plan, les directions *IR*, *IP*, *IK* de la puissance *R*, de la pesanteur du corps réunie à son centre de gravité *P*, & de leur force résultante, seront dans un même plan qui sera vertical, puisqu'il passera par la direction verticale *IP* de la pesanteur du corps, & qui sera perpendiculaire au plan *ABCD*, puisqu'il contiendra une droite *IK* perpendiculaire à ce plan. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Fig. 121. 445. Puisque le plan *RIP* dans lequel se trouvent les directions *IP*, *IR*, *IK* de la pesanteur du corps, de la puissance *R* qui le retient en équilibre, & de leur force résultante, est vertical; le plan horizontal *FBCE* lui est perpendiculaire : & puisque le même plan *RIP* est perpendiculaire au plan incliné *ABCD*, ce plan incliné lui est aussi perpendiculaire:

Ainſi (*Geom.* n°. 423) la rencontre *BC* du plan incliné *ABCD* avec le plan horizontal *FBCE*, eſt perpendiculaire au même plan *RIP*.

Donc ſi l'on continue le plan *RIP* juſqu'à ce qu'il coupe le plan incliné dans une droite *MN* & le plan horizontal dans une droite *NO*, la droite *BC* ſera perpendiculaire aux deux droites *MN*, *NO* qui ſe trouveront dans la continuation du plan *RIP*; en ſorte que les deux droites *MN*, *NO* ſeront réciproquement perpendiculaires à la droite *BC* dans laquelle ſe rencontrent le plan incliné *ABCD* & le plan horizontal *FBCE*.

COROLLAIRE II.

446. Puiſque la peſanteur du corps réunie à ſon centre de gravité *P*, la puiſſance *R* qui le retient en équilibre, & la réſultante de ces deux forces qui eſt arrêtée par la réſiſtance du plan incliné *ABCD*, ſont trois forces dirigées dans un même plan *RIP* ou *MNO* qui coupe le plan incliné & le plan horizontal ſuivant deux droites *MN*, *NO* perpendiculaires à la ſection commune *BC* de ces deux plans; & que les directions de ces trois forces ſont les ſeules choſes à conſidérer, pour trouver le rapport de la puiſſance *R* au poids qu'elle ſoûtient en équilibre ſur le plan incliné; lorſqu'on aura dans la ſuite un corps peſant à retenir en équilibre ſur un plan incliné, on imaginera ce plan & le plan horizontal coupés par un plan *MNO* qui paſſera par le centre de gravité *P* du corps peſant, & qui ſera perpendiculaire à la ſection commune *BC* des deux premiers plans; & l'on repréſentera le plan incliné par la droite *MN*, le plan horizontal par la droite *NO*; enfin l'on Fig. 121.

mènera une droite *MO* perpendiculaire à *NO*, & l'on aura un triangle rectangle *MNO* dont l'hypoténuse *MN* & les côtés *NO*, *MO* représenteront la longueur, la base & la hauteur du plan incliné sur lequel il faudra mettre le corps en équilibre.

COROLLAIRE III.

Fig. 121. 447. La longueur, la báse & la hauteur d'un plan incliné étant représentées par les côtés d'un triangle rectangle *MNO* construit comme on vient de l'expliquer; il faudra que le centre de gravité du corps pesant, la direction de la puissance *R* qui retiendra ce corps en équilibre, & la direction de la résultante de ces deux forces, soient dans le même plan *MNO* continué autant qu'il sera nécessaire. Enfin de quelque façon que soit dirigée la puissance *R* dans le plan *MNO*, il faudra que la résultante de cette puissance & de la pesanteur du corps soit toûjours dirigée perpendiculairement sur la droite *MN*; autrement le corps ne seroit pas en équilibre sur le plan représenté par *MN*.

PROBLEME.

Fig. 122, 123, 124 & 125. 448. *La pesanteur d'un corps* K *qui s'appuie sur un plan incliné* MN *par un seul point* E, *étant donnée; trouver la direction & la quantité de force d'une puissance* R *dirigée comme on voudra, qui retiendra ce corps en équilibre sur le plan* MN, *& déterminer la charge qui en résultera perpendiculairement à ce plan.*

SOLUTION.

Par le point *E* qui sert d'appui au corps *K* sur

le plan *MN*, ayant mené une perpendiculaire indéfinie *AE* sur ce plan, on tirera par le centre de gravité *P* du corps pesant une verticale *AB*; & du point *A* où cette verticale rencontrera la droite *AE*, l'on mènera par quelque point *S* du corps pesant une droite *ASR* qui fasse avec *AB* un angle quelconque *RAB* dans lequel la droite *AE* soit renfermée : enfin sur une partie quelconque *AD* comme diagonale prise sur la droite indéfinie *AE* à commencer du point *A*, on fera un parallélogramme *ABDC* dont les côtés contigus *AB*, *AC* seront pris sur les deux droites *AP*, *AR*.

La figure étant ainsi construite; si l'on représente la pesanteur du corps *K* par le côté *AB* du parallélogramme *ABDC*, la puissance *R* qui le retiendra en équilibre sur le plan *MN*, & la charge qui en résultera perpendiculairement à ce plan, seront représentées, tant pour leurs directions que pour leurs quantités de force, par le côté *AC* & par la diagonale *AD* du même parallélogramme. *C. Q. F. T.*

Car puisque la puissance *R* doit retenir le corps pesant *K* en équilibre sur le plan incliné *MN*, la force qui résultera à ce corps en vertu de la puissance *R* & de sa pesanteur dirigée suivant la verticale *AB*, sera dirigée (*n°*. 442) suivant la droite *AE*. Ainsi la pesanteur du corps *K* & la puissance *R* doivent être représentées, tant pour leurs quantités de force que pour leurs directions, par les côtés contigus d'un parallélogramme *ABDC* qui ait pour diagonale une partie *AD* de la droite indéfinie *AE*, & dont les côtés *AB*, *AC* soient pris, l'un sur la verticale *AB*, l'autre sur une droite quelconque *AR* menée du

point *A* par un point *S* du corps pesant, auquel on voudra appliquer la puissance *R*.

Donc si l'on représente la pesanteur du corps *K*, par la partie *AB* de sa direction, qu'on a prise pour un côté du parallélogramme *ABDC*, les directions & les quantités de force de la puissance *R* & de la charge du plan *MN*, seront représentées par le côté *AC* & par la diagonale *AD* du même parallélogramme.

COROLLAIRE I.

Fig. 126. 449. Comme on peut faire une infinité de parallélogrammes *ABDC*, *ABHV*, *ABGΓ*, *ABFS*, *ABIQ*, &c. qui auront tous le même côté *AB* sur la direction de la pesanteur du corps *K*, & dont les diagonales *AD*, *AH*, *AG*, *AF*, *AI*, &c. seront toutes sur la droite indéfinie *AE* menée par le point d'appui *E* du corps perpendiculairement au plan incliné *MN*; & que, suivant la Solution du Problème, pour rendre le corps pesant immobile sur le plan *MN*, il suffit que sa pesanteur & la puissance *R* soient représentées par les côtés contigus *AB*, *AC*, ou *AB*, *AV*, ou *AB*, *AΓ*, ou *AB*, *AS*, ou *AB*, *AQ*, &c. de quelqu'un de ces parallélogrammes; il est évident que

Si la pesanteur du corps *K* est constamment représentée par la partie *AB* de la verticale qui passe par son centre de gravité P; on pourra prendre, pour retenir ce corps en équilibre sur le plan incliné *MN*, une infinité de puissances différentes représentées par les côtés *AC*, *AV*, *AΓ*, *AS*, *AQ*, &c. d'une infinité de parallélogrammes, dont les directions passeront toutes par le même point *A* où la verticale tirée

par le centre de gravité P du corps pesant, rencontrera la droite AE menée par le point d'appui E de ce corps perpendiculairement sur le plan incliné MN.

COROLLAIRE II.

450. Les côtés de parallélogrammes AC, AV, AT, AS, AQ, &c. par lesquels on peut représenter les quantités de force & les directions de toutes les différentes puissances propres à retenir le corps K en équilibre sur le plan incliné MN, étant égaux à leurs opposés BD, BH, BG, BF, BI, &c. qui partent tous du même point B, & qui se terminent à la même droite indéfinie AE perpendiculaire au plan MN: il est évident que Fig. 126.

1°. Comme la droite BD qu'on mènera du point B perpendiculairement sur la droite indéfinie AE, ou parallèlement au plan incliné MN, sera la plus courte de toutes les lignes comprises entre le point B & la droite AE; la puissance R qui sera dirigée suivant la droite AC parallèle au plan incliné MN sera la moindre de toutes celles qu'on pourra employer pour retenir le corps K en équilibre sur ce plan. Et réciproquement si la puissance R est la plus petite de toutes celles qu'on pourra employer pour retenir le corps K en équilibre sur le plan MN, elle sera dirigée parallèlement à ce plan.

2°. Les côtés BH, BG qui font des angles égaux avec la droite BD parallèle au plan MN, étant égaux, les puissances qui seront représentées par les côtés opposés AV, AT, lesquels feront aussi des angles égaux avec une droite AR parallèle au plan MN, seront égales; en sorte que pour retenir le

corps pesant *K* en équilibre sur le plan incliné *MN*, on pourra employer séparément une infinité de puissances, lesquelles prises deux à deux à la même distance de la direction de la plus petite ou d'une droite *AR* parallèle au plan *MN*, seront égales.

3°. Comme les plus longs de tous les côtés *BH*, *BG*, *BF*, *BI*, &c. seront ceux qui feront les plus grands angles avec la droite *BD* parallèle au plan *MN*, les puissances qu'on emploiera pour retenir le corps pesant *K* en équilibre sur le plan *MN*, seront d'autant plus grandes que leurs directions *AV*, *AT*, *AS*, *AQ*, &c. feront de plus grands angles avec la droite *AR* parallèle au plan *MN*, c'est-à-dire avec la direction de la plus petite de toutes les puissances.

Et réciproquement comme les plus longs des côtés *BH*, *BG*, *BF*, *BI*, &c. feront les plus grands angles avec la droite *BD*, les plus grandes des puissances qui retiendront le corps pesant sur le plan *MN*, feront les plus grands angles avec la droite *AR* parallèle au plan *MN*.

Corollaire III.

Fig. 126. 451. Comme toutes les droites ou côtés des parallélogrammes *AC*, *AV*, *AT*, *AS*, *AQ*, &c. qui peuvent représenter toutes les puissances propres à retenir le corps pesant *K* en équilibre sur le plan *MN*, seront évidemment contenues dans l'angle *XAE* compris entre le prolongement *AX* de la verticale tirée par le centre de gravité *P* du corps *K*, & la droite indéfinie *AE* menée par le point d'appui du même corps perpendiculairement sur le plan *MN*; il est clair que

1°. Si l'on mène *AR* parallèlement au plan incliné *MN*, la puissance qui sera dirigée suivant *AX*, sera (n°. 450) la plus grande de toutes celles qui peuvent être comprises dans l'angle *RAX*. Or cette puissance étant directement opposée à l'action de la pesanteur du corps *K*, soûtiendra tout le poids de ce corps sans le secours du plan incliné, & sera par conséquent égale à ce poids.

Et réciproquement si une puissance est la plus grande de toutes celles qui peuvent être dirigées dans l'angle *RAX*, elle sera dirigée suivant *AX*, & sera par conséquent égale au poids du corps qu'elle doit soûtenir.

2°. Si par le point *A* l'on mène une droite *AQ* qui fasse avec *AR* un angle *RAQ* égal à l'angle *RAX*, la puissance qui sera dirigée suivant *AQ* sera égale à celle qui seroit dirigée suivant *AX* (n°. 450), & sera par conséquent égale au poids *K*. Ainsi toute puissance qui sera moindre que le poids *K*, sera dirigée dans l'angle *QAX*, & pourra avoir deux directions également éloignées de la droite *AR*, l'une dans l'angle *RAX*, l'autre dans l'angle *RAQ*.

3°. Toutes les puissances plus grandes que le poids *K*, & dont les directions seront par conséquent plus éloignées de la droite *AR* que les droites *AQ*, *AX*, seront contenues dans l'angle *QAE*; ainsi chacune d'elles ne pourra avoir qu'une seule direction.

COROLLAIRE IV.

452. Si le corps *K* retenu en équilibre sur le plan incliné *MN*, est une sphère dont toutes les parties égales soient également pesantes, en sorte que Fig. 124

ſon centre de figure *A* ſe confonde avec ſon centre de gravité *P*; la direction de la puiſſance *R* qui retiendra cette ſphère en équilibre, paſſera néceſſairement par ſon centre commun de figure & de gravité.

Car la perpendiculaire *AE* qu'on mènera au plan *MN* par le point d'attouchement ou d'appui *E* de la ſphère ſur ce plan, paſſera par le centre de figure de cette ſphère confondu avec ſon centre de gravité; ainſi cette perpendiculaire *AE* & la verticale *PB* tirée par le centre de gravité *P* de la ſphère, ſe croiſeront à ſon centre commun de figure & de gravité. Et comme la direction de la puiſſance *R* doit néceſſairement paſſer par le point de rencontre des deux lignes *AE*, *PB*, puiſque c'eſt à ce point que doit être l'angle d'un parallèlogramme dont les côtés & la diagonale doivent repréſenter la peſanteur du corps, la puiſſance *R*, & la charge du plan *MN*; il eſt clair que la direction de cette puiſſance *R* paſſera par le centre commun de figure & de gravité de la ſphère.

COROLLAIRE V.

Fig. 127. 453. Quoique le corps peſant *K* qu'on vient de conſidérer dans le Problème & les Corollaires précédens, ait été ſuppoſé appuyé par un ſeul point *E* ſur le plan incliné *MN*; rien n'empêche d'appliquer la théorie qu'on vient d'expliquer à un corps appuyé par pluſieurs points *E*, *e*, *ε*, &c. ou par une face *Ee* ſur un plan incliné.

Car (*n°.* 439) pour qu'un corps peſant *K* reſte immobile ſur un plan incliné *MN*, il ſuffit que la réſultante de ſa peſanteur & de la puiſſance *R* deſtinée à le retenir, paſſe par un point de la baſe de ce

corps ſur ce plan, & ſoit perpendiculaire au même plan. Or on pourra faire en ſorte que cette réſultante paſſe par tel point *E* ou *e* ou *ε* qu'on voudra de la baſe *E e* du corps *K*; & regardant ce point comme un appui unique de ce corps, on trouvera, comme on a fait dans le Problème, la direction & la quantité de force d'une puiſſance *R* dirigée à volonté, qui retiendra ce corps ſur ce point qu'on voudra conſidérer comme l'appui du corps, & l'on déterminera la charge de cet appui, qui ſera celle du plan incliné *MN*.

COROLLAIRE VI.

454. Si par les extrémités *E*, *e*, & par un point quelconque *ε* de la baſe *E e* du corps *K* ſur le plan *MN*, on mène des perpendiculaires *AD*, *ad*, *α δ* ſur ce plan, & que par le centre de gravité *P* du corps peſant l'on mène une verticale indéfinie *P Z* qui rencontre ces perpendiculaires aux points *A*, *a*, *α*; la direction de la puiſſance qu'on voudra employer pour retenir le corps *K* en équilibre ſur le plan *MN*, paſſera néceſſairement par le point *A* ou *a* ou *α*, ſuivant qu'on voudra que le point d'appui principal de ce corps ſur ce plan, ſoit au point *E* ou *e* ou *ε* de ſa baſe : en ſorte que toutes les puiſſances *R*, *r*, *ρ*, &c. capables de retenir le corps ſur le plan *MN*, ne pourront rencontrer la verticale *P Z* que dans quelque point de ſa partie *A a* compriſe entre les deux perpendiculaires *A D*, *a d* menées ſur le plan incliné *M N* par les extrèmités de la baſe *E e* du corps *K* ſur ce plan. Fig. 127.

COROLLAIRE VII.

455. Si toutes les puiſſances *R*, *r*, *ρ*, &c. dont Fig. 127.

chacune doit retenir le corps K sur le plan MN, ont des directions AR, ar, $\alpha\varrho$ parallèles entr'elles, elles seront toutes égales; & les charges qui résulteront perpendiculairement au plan MN en vertu de chacune de ces puissances & de la pesanteur du corps K, seront aussi égales.

Car si l'on prend sur la direction verticale PZ de la pesanteur du corps K des parties égales AB, ab, $\alpha\beta$ pour représenter la pesanteur de ce corps, & que par les points B, b, β l'on mène parallèlement aux directions des puissances R, r, ϱ qu'on suppose parallèles entr'elles, des droites BD, bd, $\beta\delta$ terminées par les perpendiculaires AD, ad, $\alpha\delta$ qu'on a menées sur le plan MN par différens points E, e, ϵ de la base du corps K sur ce plan; les triangles ABD, abd, $\alpha\beta\delta$ dont les côtés seront parallèles chacun à chacun, & dont les bases AB, ab, $\alpha\beta$ sont égales, seront égaux : ainsi leurs sommets D, d, δ seront dans une même droite CV parallèle à AZ; & par conséquent tous les parallèlogrammes $ABDC$, $abdc$, $\alpha\beta\delta\kappa$ seront parfaitement égaux.

Or la pesanteur du corps K, chaque puissance R ou r ou ϱ, & la charge qui en doit résulter perpendiculairement sur le plan MN, doivent être représentées par les côtés contigus & par la diagonale du parallélogramme $ABDC$ ou $abdc$ ou $\alpha\beta\delta\kappa$.

Donc si la pesanteur du corps K représentée par les côtés égaux AB, ab, $\alpha\beta$ de ces parallélogrammes demeure toûjours la même, les puissances parallèles R, r, ϱ représentées par les côtés AC, ac, $\alpha\kappa$ des mêmes parallélogrammes seront égales; & les charges du plan incliné MN représentées par les diagonales

AD, *ad*, *&c.* perpendiculaires à ce plan, seront aussi égales.

Puisque chaque point E, e, ε *de la base d'un corps sur un plan incliné* MN *peut être regardé comme le point d'appui unique de ce corps, & qu'on a démontré* (n°. 449) *qu'une infinité de puissances différemment dirigées peuvent retenir en équilibre sur un plan incliné un corps pesant qui n'a qu'un point d'appui sur ce plan; on pourra pour chaque point* E, e, ε, &c. *qu'on voudra prendre pour l'appui principal du corps* K, *faire toutes les remarques qu'on a données dans les Corollaires II, III, IV.*

COROLLAIRE VIII.

456. Si le centre de gravité *P* & le point d'appui E du corps pesant *K* qu'on doit retenir en équilibre sur le plan incliné *MN*, sont dans une même droite verticale *PE*; la direction de la puissance *R* ou *r* ou ρ qui retiendra ce corps, passera nécessairement par son appui *E*. Fig. 125.

Car la pesanteur du corps *K* réunie à son centre de gravité *P* agissant suivant une ligne verticale *PB*, sera dirigée suivant la droite *P E* qu'on suppose verticale; ainsi sa direction passera par l'appui *E*, & rencontrera par conséquent en ce même point *E* la perpendiculaire menée par l'appui au plan incliné *M.N.* Et comme la direction de la puissance *R* ou *r* ou ρ doit nécessairement passer par le point de rencontre de cette perpendiculaire avec la verticale *P B*, il est démontré que la direction de cette puissance passera par l'appui *E* du corps pesant qu'elle doit retenir en équilibre sur le plan *M N*.

THÉOREME.

Fig. 122, 123 & 124. 457. *Si par le sommet* M *du plan incliné* MN *sur lequel une puissance* R *retient un corps* K *en équilibre, on mène perpendiculairement à la direction de cette puissance, une droite* FMQ *qui rencontre en quelque point* Q *le prolongement de la base* NO *du plan incliné; la pesanteur du corps* K, *la puissance* R *qui le retiendra sur le plan* MN, *& la charge qui en résultera perpendiculairement à ce plan, seront représentées par les trois côtés* NQ, QM, NM *du triangle* NQM: *en sorte que si ces trois forces sont nommées* P, R, E, *on aura* P : R : E : : NQ : QM : NM.

DÉMONSTRATION.

On a trouvé (*n*°. 448) que la pesanteur du corps *K*, la puissance *R* qui le retient sur le plan *MN*, & la charge *E* qui en résulte perpendiculairement à ce plan, sont proportionnelles aux côtés *AB*, *AC* & à la diagonale *AD* d'un parallélogramme *ABDC*; c'est-à-dire qu'on aura *P* : *R* : *E* : : *AB* : *AC* : *AD* ou : : *AB* : *BD* : *AD*.

Mais (*n*°. 448) le parallèlogramme *ABDC* ou le triangle *ABD* est construit de manière que son côté *AB* mené par le centre de gravité du corps *K* est vertical, & par conséquent perpendiculaire à *NQ* ou à la base *NO* du plan; son côté *BD* est parallèle à la direction de la puissance *R*, & par conséquent perpendiculaire à la droite *FMQ* qu'on a menée perpendiculairement à la direction de cette puissance; & la diagonale de ce parallélogramme ou le côté *AD* du triangle *ABD*, est perpendiculaire au plan *MN*. Ainsi les deux triangles *ABD*, *NQM* ont les trois

côtés perpendiculaires chacun à chacun, & sont par conséquent semblables; d'où il suit que l'on aura $AB : BD : AD :: NQ : QM : NM$.

Donc puisque $P : R : E :: AB : BD : AD$; on aura aussi ... $P : R : E :: NQ : QM : NM$. C. Q. F. D.

Corollaire I.

458. Lorsque par un point quelconque ou par le sommet M d'un plan incliné, l'on mène perpendiculairement à la direction de la puissance R une droite FMQ qui rencontre en quelque point Q la direction de la base du plan, & que l'on trouve $P : R : E :: NQ : MQ : NM$ ou simplement $P : R :: NQ : MQ$; le corps K est retenu en équilibre sur le plan incliné. Fig. 122, 123 & 124.

Car si du point A où concourent les directions AB, AR de la pesanteur propre du corps & de la puissance R, on mène une perpendiculaire AD sur le plan incliné MN, & que sur une partie AD de cette perpendiculaire comme diagonale on fasse le parallélogramme $ABDC$; les deux triangles MNQ, DAB seront semblables, puisqu'ils auront les côtés perpendiculaires chacun à chacun. Ainsi l'on aura $NQ : MQ : NM :: AB : DB : AD$; d'où il suit que si $P : R :: NQ : MQ$, on aura aussi $P : R :: AB : DB$ ou $:: AB : AC$; c'est-à-dire que la pesanteur du corps & la puissance R seront représentées par les côtés AB, AC du parallélogramme $ABDC$: ainsi la résultante de ces deux forces sera représentée par la diagonale AD perpendiculaire au plan MN; & par conséquent (n°. 439) le corps K demeurera immobile sur le plan incliné.

COROLLAIRE II.

Fig. 123. 459. Lorsque la direction *AR* de la puissance *R* sera parallèle à la longueur *MN* du plan incliné, la droite *FMQ* menée par le sommet *M* de ce plan perpendiculairement à la direction de la puissance *R*, sera aussi perpendiculaire à la longueur *MN* du plan; en sorte que le triangle *MNQ* sera rectangle & semblable au triangle *ONM*. Ainsi l'on aura *NQ* : *MQ* : *NM* : : *NM* : *OM* : *NO*.

Mais (*n°.* 457) *P* : *R* : *E* : : *NQ* : *MQ* : *NM*.

Donc on aura aussi *P* : *R* : *E* : : *NM* : *OM* : *NO*. C'est-à-dire que dans le cas où un corps *K* est retenu en équilibre sur un plan incliné par une puissance parallèle à la longueur de ce plan, la pesanteur de ce corps, la puissance qui le retient en équilibre, & la charge qui en résulte perpendiculairement au plan, sont proportionnelles à la longueur, à la hauteur, & à la base de ce plan.

Comme la puissance qui retient un corps pesant sur un plan incliné, en le tirant parallèlement à la longueur de ce plan, est égale à la force avec laquelle ce corps tend à descendre le long du même plan, il suit évidemment de ce Corollaire, que le poids d'un corps placé sur un plan incliné, est à la force avec laquelle il tend à descendre le long de ce plan, comme la longueur du plan, est à sa hauteur.

COROLLAIRE III.

Fig. 124. 460. Si la direction de la puissance *R* est parallèle à la base *NO* du plan incliné, la droite *FMQ* menée par le sommet de ce plan perpendiculairement

à

à la direction de cette puissance, se confondra avec la hauteur MO de ce plan; en sorte qu'on aura $MQ = MO$ & $NQ = NO$.

Ainsi puisque (n°. 457) $P : R : E :: NQ : MQ : NM$,
on aura aussi . . . . . . $P : R : E :: NO : MO : NM$;
c'est-à-dire que dans le cas où un corps pesant sera retenu en équilibre sur un plan incliné par une puissance R de direction horizontale ou parallèle à la base NO de ce plan, la pesanteur de ce corps, la puissance R, & la charge qui en résultera perpendiculairement au plan incliné, seront trois forces proportionnelles à la base, à la hauteur, & à la longueur du même plan incliné.

COROLLAIRE IV.

461. Donc si l'on soûtient successivement le même corps K sur le même plan incliné par deux puissances R, r dont l'une R soit parallèle à la longueur NM du plan, & l'autre r parallèle à la base NO du même plan; on aura $R : r :: NO : NM$. Fig. 128.

Car (n°. 459) on aura $R : P :: MO : NM$;

Et (n°. 460) on aura $P : r :: NO : MO$.

Donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura . . . . $R : r :: NO : NM$.

THÉORÈME.

462. *Lorsqu'un corps* K *est retenu en équilibre sur un plan incliné par une puissance* R *de direction quelconque; la pesanteur* P *du corps* K, *la puissance* R *qui le retient sur le plan, & la charge* E *qui en résulte perpendiculairement à ce plan, sont proportionnelles au* Fig. 128.

cosinus de l'angle que la direction de la puissance R *fait avec la longueur du plan incliné, au sinus de l'angle que le plan incliné fait avec sa base, & au cosinus de l'angle que la direction de la puissance* R *fait avec la base du même plan incliné.*

C'est-à-dire que si l'on prend S *pour le caractère qui désigne le sinus de l'angle au devant duquel il est écrit, &* coS. *pour le caractère qui désigne le cosinus de l'angle au devant duquel on le met, on aura* $P : R : E :: coS. RIM : S. MNO : coS. RLO.$

DÉMONSTRATION.

Par le sommet *M* du plan incliné soit menée perpendiculairement à la direction de la puissance *R*, la droite *FMQ* qui rencontrera le prolongement de la base *NO* en quelque point Q; on aura (*n*°. 457) $P : R : E :: NQ : QM : NM$. Mais (*Géom. n*°. 576) $NQ : QM : NM :: S. NMQ : S. MNQ : S. MQN$. Ainsi $P : R : E :: S. NMQ : S. MNQ : S. MQN$.

Or 1°. les deux angles *NMQ*, *FMI* étant supplémens l'un de l'autre, ont le même sinus; & le triangle *MFI* étant rectangle en *F*, l'angle *FMI* est le complément de l'angle *FIM* ou *RIM*. Ainsi $S. NMQ$ ou $S. FMI$ est le cosinus de l'angle *RIM* que la direction de la puissance *R* fait avec le plan incliné *MN*; c'est-à-dire que $S. NMQ = coS. RIM$.

2°. Les deux angles *MNQ*, *MNO* n'étant pas des angles différens, ont le même sinus.

3°. Le triangle *FLQ* étant rectangle en *F*, l'angle *FQL* ou *MQN* est le complément de l'ang[le] *RLO* que la direction de la puissance *R* fait avec l[a]

base *NO* du plan incliné. Ainsi *S. MQN* = *coS. REO*.

Donc puisque *P* : *R* : *E* :: *S. NMQ* : *S. MNQ* : *S. MQN*, on aura aussi . . *P* : *R* : *E* :: *coS. RIM* : *S. MNO* : *coS. REO*. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

463. Si la direction de la puissance *R* est parallèle à la longueur *MN* du plan incliné, la pesanteur du corps, la puissance *R* qui le retiendra en équilibre, & la charge qui en résultera perpendiculairement au plan incliné, seront proportionnelles au sinus total qui est le sinus de l'angle droit, au sinus de l'angle *MNO* que le plan fera avec sa base, & au sinus de l'angle *NMO* que le même plan fera avec sa hauteur : c'est-à-dire qu'on aura *P* : *R* : *E* : : *S. T* : *S. MNO* : *S. NMO*. Fig. 113.

Car la direction de la puissance étant parallèle à la longueur *MN* du plan incliné, on trouvera (n°. 459) *P* : *R* : *E* : : *NM* : *OM* : *NO*.

Mais (*Géom.* n°. 576)

NM : *OM* : *NO* : : *S. T* : *S. MNO* : *S. NMO*.

Donc *P* : *R* : *E* : : *S. T* : *S. MNO* : *S. NMO*.

COROLLAIRE II.

464. Si la direction de la puissance *R* est parallèle à la base *NO* du plan incliné, la pesanteur du corps *K*, la puissance *R* qui le retiendra en équilibre sur le plan, & la charge *E* qui en résultera perpendiculairement à ce plan, seront proportionnelles au sinus de l'angle *NMO* que le plan fera avec sa hauteur, au sinus de l'angle *MNO* que le même plan Fig. 114.

sera avec sa base, & au sinus de l'angle droit : c'est-à-dire qu'on aura $P : R : E :: S. NMO : S. MNO : S. T.$

Car la puissance R étant parallèle à la base NO du plan incliné, on trouvera (*n*°. 460)
$P : R : E :: NO : MO : NM.$

Mais (*Géom.* *n*°. 576)
$NO : MO : NM :: S. NMO : S. MNO : S. MON = S. T.$

Donc $P : R : E :: S. NMO : S. MNO : S. T.$

Corollaire III.

Fig. 129. 465. Donc si le même corps K est retenu successivement sur le même plan incliné par deux puissances R, r différemment dirigées, ces deux puissances seront réciproquement proportionnelles aux cosinus des angles que leurs directions feront avec le plan incliné : c'est-à-dire qu'on aura
$R : r :: coS. riM : coS. RIM.$

Car nommant toûjours P la pesanteur du corps K,

on aura (*n*°. 462) $\begin{cases} R : P :: S. MNO : coS. RIM. \\ P : r :: coS. rIM : S. MNO. \end{cases}$

Ainsi en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $R : r :: coS. rIM : coS. RIM.$

Remarque.

Fig. 130. 466. Avant M. Varignon, l'on rapportoit à l'équilibre du levier celui d'un corps placé sur un plan incliné : mais faute de faire sur ce dernier équilibre une observation qui lui est particulière & qui ne regarde point celui du levier, la démonstration qu'on en donnoit n'étoit ni générale ni complète, &

pouvoit par conſéquent pas mettre les commençans en état de raiſonner juſte ſur cet équilibre.

La démonſtration qu'on donnoit de l'équilibre d'un corps ſur un plan incliné, n'étoit point générale; parce que le corps peſant *K* qu'il falloit ſoûtenir ſur ce plan étoit ſuppoſé ſphérique, que ſon centre *A* de figure étoit regardé comme ſon centre de gravité, & que la direction *A R* de la puiſſance *R* deſtinée à retenir ce corps, étoit ſuppoſée paſſer par ſon centre commun *A* de figure & de gravité. Après ces ſuppoſitions on imaginoit un levier angulaire *B E D* dont l'appui *E* étoit placé au point d'attouchement E de la ſphère & du plan, & dont les deux bras *E B*, *E D* étoient perpendiculaires aux directions *A R*, *A D* de la puiſſance *R* & de la peſanteur du corps ſphérique réunie à ſon centre commun *A* de figure & de gravité : & comme on avoit démontré que deux puiſſances en équilibre ſur un levier ſont en raiſon réciproque des diſtances de l'appui de ce levier à leurs directions, on en concluoit que le poids du corps ſphérique *K* étoit à la puiſſance *R* qui le retenoit en équilibre ſur le plan *M N*, comme la perpendiculaire *E B* menée de l'appui ſur la direction de la puiſſance *R*, étoit à la perpendiculaire *E D* menée ſur la direction verticale *A D* de la peſanteur de ce corps; c'eſt-à-dire qu'en nommant *P* la peſanteur du corps *K*, on concluoit cette proportion *P* : *R* :: *E B* : *E D*.

Cette proportion étant regardée comme ſuffiſamment prouvée, on en déduiſoit aiſément que la peſanteur *P* du corps *K* étoit à la puiſſance *R*, comme le coſinus de l'angle *A G N* compris entre la direction de cette puiſſance & la longueur *M N* du

plan incliné, étoit au sinus de l'angle *MNO* compris entre la longueur *MN* & la base *NO* du même plan. Car le rayon *AE* de la sphère étant considéré comme le sinus total, les deux droites *EB*, *ED* perpendiculaires aux directions *AR*, *AD* de la puissance *R* & de la pesanteur de la sphère, pouvoient être regardées comme les sinus des deux angles *EAR*, *EAD*. Mais 1°. le rayon *AE* passant par le point d'attouchement *E* de la sphère & du plan incliné, l'angle *AEG* est droit, & l'angle *EAR* est par conséquent le complément de l'angle *AGE*. 2°. Le rayon *AE* & la verticale *AD* étant perpendiculaires à la longueur *MN* & à la base *NO* du plan incliné, l'angle *EAD* est égal à l'angle *MNO*. Ainsi puisque l'on trouvoit le poids *P* de la sphère à la puissance *R*, comme le sinus de l'angle *EAR* au sinus de l'angle *EAD*; on pouvoit conclurre que le poids *P* de la sphère étoit à la puissance *R*, comme le sinus du complément de l'angle *AGN* étoit au sinus de l'angle *MNO*.

La démonstration qu'on donnoit de l'équilibre d'un corps sur un plan incliné, n'étoit pas complète, en supposant même le corps sphérique & son centre de gravité confondu avec son centre de figure; parce qu'on ne faisoit point voir que la direction de la puissance *R* devoit nécessairement passer par le centre commun *A* de figure & de gravité de ce corps.

Pour rendre générale & complète la démonstration de l'équilibre d'un corps sur un plan incliné en rapportant cet équilibre à celui du levier, il auroit fallu démontrer que la direction *AE* de la charge de l'appui *E* du levier coudé *BED*, doit nécessairement être perpendiculaire au plan incliné *MN*,

comme nous l'avons démontré (n°. 442); & que les directions *AD*, *AR* des deux puissances *P*, *R*, c'est-à-dire, de la pesanteur du corps *K* & de la puissance *R* appliquées aux extrémites des bras du levier coudé *BED*, doivent nécessairement se rencontrer en quelque point *A* de la direction *AE* de la charge de l'appui *E*, comme il a été dit (n° 349). Mais cette démonstration auroit supposé la théorie de la composition & décomposition des forces, dont on ne faisoit point usage dans le traité du levier, ni dans celui du plan incliné.

En supposant que la direction *AE* de la charge de l'appui *E* doit être perpendiculaire au plan incliné *MN*, & que les directions *AD*, *AR* de la pesanteur *P* du corps *K* & de la puissance *R* doivent nécessairement passer par un même point *A* ou *a* de la direction *AE* de la charge de l'appui; il est aisé de rendre générale & complète la démonstration de l'équilibre d'un corps sur un plan incliné, en rapportant cet équilibre à celui du levier, sans être obligé de confondre le centre de gravité de ce corps avec son centre de figure.

Car en quelque point *P* que se trouve le centre de gravité du corps *K* sphérique ou non sphérique; si par ce centre de gravité *P* l'on imagine une verticale *aPd* qui rencontre en quelque point *a* la droite *aE* menée par l'appui *E* perpendiculairement au plan *MN*, la direction de la puissance *r* qui doit retenir ce corps en équilibre passera nécessairement par le point *a*: & si par le point d'appui *E* l'on mène deux perpendiculaires *Eb*, *Ed* aux directions *ar*, *ad* de la puissance *r* & de la pesanteur du corps *K*, ces deux lignes *Eb*, *Ed* pourront être regardées Fig. 130 & 131.

comme les bras d'un levier coudé bEd aux extrémités duquel la puissance r & la pesanteur du corps K seront appliquées. Ainsi dans le cas où la puissance r & la pesanteur P du corps K seront en équilibre, on aura $P : r :: Eb : Ed$.

Mais la droite aE étant considérée comme le sinus total, les deux droites Eb, Ed seront les sinus des angles raE, daE. Or l'angle aEM étant droit, l'angle raE sera le complément de celui agN que la direction de la puissance r fera avec le plan incliné MN; & l'angle daE sera égal à l'angle MNO, puisqu'ils auront les côtés perpendiculaires chacun à chacun. Ainsi la droite Eb sera le sinus de complément, c'est-à-dire le cosinus de l'angle que la direction de la puissance r fera avec le plan incliné MN, & la droite Ed sera le sinus de l'angle MNO, ou de l'inclinaison du plan MN.

Donc puisque $P : r :: Eb : Ed$, il est démontré que la pesanteur du corps K sphérique ou non sphérique, réunie en un point quelconque P de sa figure, est à la puissance r qui le retient en équilibre sur le plan incliné MN, comme le cosinus de l'angle que la direction de cette puissance fait avec le plan incliné, est au sinus de l'angle MNQ que le même plan fait avec sa base.

Si par le sommet M du plan incliné l'on mène à la direction de la puissance r une droite FMQ qui rencontre la base du plan en quelque point Q, l'angle NMQ ou son opposé au sommet FMg sera le complément de l'angle agN que la direction de la puissance r fait avec le plan MN; ainsi l'on aura $P : r :: S.\ NMQ : S.\ MNO$ ou $S.\ MNQ$. Mais

S. NMQ : S. MNQ : : NQ : MQ. Donc on aura aussi *P* : *r* : : *NQ* : *MQ*; ce qui a déjà été démontré (*n*°. 457).

On doit remarquer dans cette démonstration, que la direction de la puissance *r* ne passera par le centre de gravité *P* du corps pesant qu'elle retiendra en équilibre, que dans le cas où ce centre de gravité *P* se trouvera dans la droite *aE* menée par l'appui du corps perpendiculairement sur le plan *MN*.

CHAPITRE II.

D'un Corps pesant soûtenu en équilibre par plusieurs plans.

467. LORSQU'UN corps est soûtenu entre deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH* par les résistances seules de ces plans, & qu'il n'a point d'appui dans la direction *QP* de sa pesanteur réunie à son centre de gravité *P*; on est obligé de décomposer sa pesanteur en deux autres forces dirigées vers les points d'appui de ce corps sur ces plans; & comme les forces qui naissent de cette décomposition doivent être totalement détruites par les résistances des deux plans *ABCD*, *IBCH*, il faut que leurs directions soient perpendiculaires à ces plans. Fig. 131.

Mais la pesanteur du corps réunie à son centre de gravité *P*, ayant sa direction propre suivant la verticale *QP*, on ne peut pas la supposer appliquée à d'autres points qu'à ceux de la verticale *QP*; ainsi pour décomposer la pesanteur du corps en deux

forces qui soient détruites ou soûtenues par les résistances des deux plans *ABCD*, *IBCH*, il faut qu'il y ait dans la verticale *QP* menée par le centre de gravité du corps pesant, un point Q duquel on puisse mener sur ces deux plans inclinés, deux perpendiculaires *QR*, *QS* qui passent par les appuis du corps pesant sur ces plans.

468. Or les deux perpendiculaires *QR*, *QS*, pour être les directions des forces dans lesquelles il faut décomposer la pesanteur du corps, doivent être les côtés d'un même parallélogramme dont la diagonale soit dirigée suivant *QP*. Donc le plan dans lequel on fera la décomposition de la pesanteur d'un corps soûtenu par deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH*, doit être vertical & perpendiculaire à ces deux plans; puisqu'il doit renfermer la verticale *QP*, & les deux droites *QR*, *QS* perpendiculaires aux deux plans *ABCD*, *IBCH*.

469. Ainsi lorsqu'un corps pesant sera soûtenu en équilibre par les seules résistances de deux plans *ABCD*, *IBCH*, on imaginera que ce corps est coupé par un plan vertical *QKNM* mené par son centre de gravité *P* perpendiculairement à ces deux plans inclinés; & l'on sera assuré que les appuis du corps sur les deux plans inclinés, la direction de sa pesanteur, & celles des charges des mêmes plans inclinés, seront dans ce plan vertical, qui sera unique, puisque sa position sera déterminée par plusieurs lignes droites tirées par un même point.

470. Le plan *QKNM* étant perpendiculaire

aux deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH*, ces deux plans lui feront réciproquement perpendiculaires ; ainsi la section commune *BC* de ces deux plans inclinés sera perpendiculaire au plan vertical *QKNM*, & sera par conséquent une ligne horizontale : d'où il suit qu'un corps pesant ne peut se soûtenir de lui-même entre deux plans inclinés, que dans le cas où la rencontre *BC* de ces deux plans est une ligne horizontale.

La rencontre *BC* des deux plans inclinés étant horizontale ou perpendiculaire au plan vertical *QKNM* qui coupe ces deux plans perpendiculairement, les droites *MN*, *KN* où ces plans seront rencontrés par le plan vertical, seront (*n*°. 435) perpendiculaires à *BC*, & seront par conséquent les longueurs des deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH*.

Si par la rencontre horizontale *BC* des deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH* on imagine un plan horizontal, la droite *LO* suivant laquelle ce plan sera rencontré par le plan vertical *QKNM* sera horizontale : & si par les extrémités *M*, *K* des longueurs *MN*, *KN* des deux plans inclinés on mène des perpendiculaires *MO*, *KL* à la droite horizontale *LO*, les droites *NO*, *NL* seront les bases des deux plans inclinés, & les droites *MO*, *KL* seront les hauteurs des mêmes plans. On ne considérera dans les deux plans inclinés que les deux triangles rectangles *MON*, *KLN* : on réduira même ces deux triangles à la même hauteur en faisant $MO = KL$.

471. Si l'on avoit à considérer un corps pesant soûtenu entre deux surfaces courbes, on imagineroit par les deux appuis du corps pesant des plans tangens

à ces surfaces ; & regardant ces plans tangens comme des plans inclinés, on conclurroit de tout ce que nous venons de dire que leur rencontre doit être une ligne horizontale, & que si l'on menoit un plan *MNK* par le centre de gravité du corps soûtenu, & par ses deux points d'appui *R*, *S* communs aux surfaces courbes & aux plans tangens, ce plan *MNK* seroit vertical & perpendiculaire aux deux plans tangens des deux surfaces courbes : & comme le corps pesant seroit soûtenu par ces plans tangens de la même manière qu'il le seroit par les surfaces courbes, on réduiroit toûjours l'équilibre d'un corps soûtenu par deux surfaces courbes, à celui d'un corps soûtenu par deux plans.

THÉOREME.

Fig. 133, 134, 135 & 136. 472. *Lorsqu'un poids* P *demeure immobile entre deux plans inclinés représentés par deux droites* KN, MN *qui se rencontrent en un point* N ; *si l'on réduit ces deux plans à la même hauteur en les terminant par une droite* KG *horizontale, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de la pesanteur du corps ; la pesanteur de ce corps & les charges qui en résulteront aux deux plans inclinés* KN, MN *qui le soûtiendront, seront proportionnelles à la ligne horizontale* KG *terminée par les deux plans inclinés, & aux parties* KN, GN *des mêmes plans comprises entre la ligne horizontale* KG *& le point* N *où les deux plans se rencontreront.*

C'est-à-dire que si l'on nomme P, S, R *la pesanteur du corps & les charges qui en résultent aux deux plans* KN, MN, *on aura* P : S : R :: KG : KN : NG.

DÉMONSTRATION.

Si par le centre de gravité P du corps pesant on

imagine une verticale AD; il y aura dans cette verticale un point A d'où l'on pourra mener dans un plan vertical par les appuis du corps, deux perpendiculaires ASB, ARC aux deux plans inclinés KN, MN; & repréſentant la peſanteur du corps qui n'a point d'appui dans ſa direction naturelle, par une partie AD de cette direction priſe depuis le point A, on la décompoſera en deux forces dirigées ſuivant les deux droites ASB, ARC: c'eſt-à-dire que ſur AD comme diagonale, on fera un parallélogramme $ABDC$ dont les côtés AB, AC repréſenteront les forces avec leſquelles les plans KN, MN ſeront chargés; en ſorte que nommant P, S, R le poids du corps & les charges des deux plans KN, MN, on aura $P : S : R :: AD : AB : AC$ ou $:: AD : AB : BD$.

Mais les triangles ABD, KNG ſeront ſemblables, puiſque les côtés de l'un ſeront perpendiculaires aux côtés de l'autre chacun à chacun. Ainſi l'on aura $AD : AB : BD :: KG : KN : NG$.

Donc puiſqu'on a trouvé $P : S : R :: AD : AB : BD$, on aura auſſi . . . . $P : S : R :: KG : KN : NG$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

473. Si l'un des deux plans, par exemple le plan MN, eſt vertical & terminé par une droite horizontale KG menée par le ſommet de l'autre plan, on aura $KG = LN$ & $NG = KL$. Fig. 136.

Or on a trouvé en général $P : S : R :: KG : KN : NG$.

On aura donc $P : S : R :: LN : KN : KL$; c'eſt-à-dire que la peſanteur du corps, la charge du plan incliné KN, & celle du plan vertical MN,

feront proportionnelles à la base, à la longueur & à la hauteur du plan incliné.

On a trouvé les mêmes rapports entre le poids d'un corps, la charge du plan incliné & la puissance qui retient le corps sur ce plan, lorsque la direction de cette puissance est horizontale ou parallèle à la base du plan: aussi un plan vertical qui résiste au corps qu'il retient suivant une direction horizontale RA, *fait-il l'office d'une puissance horizontale ou parallèle à la base du plan.*

Corollaire II.

Fig. 135. 474. Lorsque les deux plans inclinés *KN*, *MN* feront ensemble un angle droit, le triangle *KNG* sera rectangle & semblable aux deux triangles rectangles *NLK*, *MON*; parce que la ligne horizontale KG parallèle à *LO* rendra les angles *GKN*, *KGN* égaux à leurs alternes internes K*NL*, *MNO*. Ainsi l'on aura *KG* : *KN* : *NG* : : *NK* : *NL* : *LK* ou : : *MN* : *MO* : *ON*.

Donc puisqu'on a trouvé *P*:*S*:*R*::*KG*:*KN*:*NG*, on aura aussi *P* : *S* : *R* : : *NK* : *NL* : *LK* ou : : *MN* : *MO* : *ON*; c'est-à-dire que la pesanteur du corps, la charge du premier plan *KN*, & la charge du second *MN*, feront proportionnelles à la longueur, à la base & à la hauteur du premier plan, ou à la longueur, à la hauteur & à la base du second plan.

Lorsqu'un corps est retenu sur un plan par une puissance de direction parallèle à ce plan, on trouve les mêmes rapports entre le poids du corps, la charge du plan, & la puissance qui retient le corps sur ce plan; c'est-à-dire qu'on trouve le poids du corps,

la charge du plan & la puissance, proportionnelles à la longueur, à la base & à la hauteur du plan. Cette conformité de rapports vient de ce qu'une puissance qui tire parallèlement à un plan, retient un corps de la même manière que le retiendroit un autre plan perpendiculaire au premier : car ce second plan résisteroit au corps suivant une direction qui lui seroit perpendiculaire, & qui seroit par conséquent parallèle au premier plan.

COROLLAIRE III.

475. Lorsqu'un des deux plans destinés à soûtenir le corps pesant deviendra horizontal, il faudra que la verticale *PR* menée par le centre de gravité *P* du corps pesant passe par l'un des points d'appui que ce corps aura sur le plan horizontal ; puisque suivant les principes établis (*nos*. 467-469) il faut que d'un point de la verticale tirée par le centre de gravité, on puisse mener sur les deux plans des perpendiculaires par les appuis du corps, & que la perpendiculaire *PR* au plan horizontal soit verticale. Or dans ce cas le plan horizontal portera seul le poids du corps, & le plan incliné *KN* n'ayant rien à soûtenir deviendra inutile. Fig. 137.

On peut déduire la même vérité des rapports qu'on a trouvés en général entre le poids du corps & les charges des deux plans *KN*, *NG*. Ces rapports sont $P : S : R :: KG : KN : NG$. Mais dans le cas où le plan *NG* est horizontal, la droite horizontale *KG* ne le rencontre qu'à une distance infinie ; en sorte que les droites *KG*, *NG* deviennent infinies par rapport à *KN* : d'où il suit que la pesanteur du corps & la charge du plan horizontal *NG*

représentées par les droites infinies *KG*, *NG*, deviennent infinies par rapport à la charge du plan incliné *KN* représentée par la longueur finie de ce plan. Le plan *KN* ne porte donc qu'une partie infiniment petite, ou, pour mieux dire, ne porte rien du poids du corps dont le seul plan horizontal *NG* se trouve chargé.

Fig. 138. *S'il arrivoit que la verticale* AP *menée par le centre de gravité* P *du corps pesant, ne passât pas par l'appui* R *de ce corps sur le plan horizontal; il est évident que ce corps ne se soûtiendroit pas dans la position où on le mettroit, & glisseroit faute d'avoir des appuis vers lesquels on pût diriger perpendiculairement les deux forces dans lesquelles il faudroit décomposer sa pesanteur.*

Il suit de-là que si le pied d'une échelle est sur un plan horizontal NG *auquel on ne puisse pas mener par le pied de l'échelle une perpendiculaire de l'un des points de la verticale qui passe par le centre de gravité de cette échelle, elle glissera jusqu'à ce qu'elle soit couchée sur le plan horizontal* NG, *à moins qu'on n'en arrête le pied de quelque façon que ce soit.*

L'expérience fait cependant voir qu'une échelle inclinée placée sur un plan horizontal, ne glisse pas toûjours: mais cela vient de ce que les planchers sur lesquels on appuie le pied de l'échelle ne sont pas de véritables plans, & qu'ils ont des âpretés & des inégalités assez grandes pour retenir le pied de l'échelle, ou pour lui fournir un appui perpendiculaire à la direction de l'une des forces dans lesquelles la pesanteur de cette échelle doit être décomposée.

COROLLAIRE

COROLLAIRE IV.

476. Puisque (*n*°. 472) on a trouvé en général Fig. 133, 134 & 135.
p : *s* : *r* :: *KG* : *KN* : *NG*, & que (*Géom.* *n*°. 576)
KG : *KN* : *NG* :: *S*. *KNG* : *S*. *KGN* : *S*. *GKN*
ou :: *S*. *KNG* : *S*. *MNO* : *S*. *KNL*; on aura
p : *s* : *r* :: *S*. *KNG* : *S*. *MNO* : *S*. *KNL*.

C'est-à-dire que la pesanteur du corps P & les charges des deux plans inclinés *KN*, *MN* seront proportionnelles au sinus de l'angle que feront entr'eux les deux plans inclinés, & aux sinus des angles d'inclinaison de ces deux plans réciproquement pris.

Remarque.

477. Lorsqu'un corps pesant s'appuie sur deux plans inclinés *KN*, *MN* par deux faces *TV*, *RQ*, & que par les extrémités de ces faces on mène aux deux plans des perpendiculaires *TE*, *VH* & *RE*, *QF*; ces perpendiculaires comprennent entr'elles un parallélogramme *EFIH*. Or 1°. si ce parallélogramme renferme une partie *AZ* de la verticale menée par le centre de gravité *P* du corps pesant, toutes les droites menées deux à deux de chaque point de la partie *AZ* perpendiculairement sur les plans inclinés *KN*, *MN*, passeront par les faces *TV*, *RQ* qui servent d'appuis au corps pesant : ainsi ce corps restera immobile entre les deux plans inclinés *KN*, *MN*. 2°. Si ce parallélogramme n'avoit qu'un point commun avec la verticale *AD*; comme les perpendiculaires menées de ce point sur les deux plans inclinés *KN*, *MN* passeroient encore par les appuis du corps sur ces plans, ce corps resteroit encore Fig. 133.

immobile entre les deux plans. 3°. Mais si aucun point de la verticale *AD* n'appartenoit au parallélogramme *EFIH*, il n'y auroit aucun point dans la ligne *AD* duquel on pourroit mener des perpendiculaires aux deux plans inclinés *KN*, *MN* par les appuis du corps pesant sur ces plans : ainsi ce corps ne resteroit point en équilibre.

Fig. 134. Il faut encore remarquer que si le corps contenu entre les deux plans inclinés *KN*, *MN* est sphérique, il ne touchera ces deux plans qu'en deux points *S*, *R*; & les droites *AS*, *AR* menées de son centre à ses points d'appui *S*, *R* seront perpendiculaires aux deux plans inclinés *KN*, *MN* : en sorte que si le centre de gravité *P* de ce corps sphérique est à son centre *A* de figure, ce corps restera immobile entre les deux plans, dans quelque situation qu'on le mette; pourvû que, comme il a été dit au commencement de ce Chapitre, la droite où se rencontreront les deux plans inclinés soit horizontale. Mais si le centre de gravité *P* du corps sphérique n'est pas à son centre *A* de figure, ce corps ne restera immobile entre les deux plans inclinés, que dans le cas où son centre *P* de gravité & son centre *A* de figure seront dans une même droite verticale.

PROBLEME.

Fig. 139. 478. *Trouver la position qu'une ligne droite considérée comme pesante, doit avoir entre deux plans inclinés* KN, MN, *pour être en équilibre.*

SOLUTION.

Par un point quelconque *S* de l'un des plans

inclinés, on mènera deux droites *SB*, *SC* perpendiculaires l'une au plan *KN*, l'autre au plan *MN*, & on les terminera par une ligne verticale quelconque *BC*. Puis par le point *S* & par le milieu *E* de la droite *BC*, on mènera une droite *SR* terminée par les deux plans inclinés *KN*, *MN*; & cette droite *SR*, aussi-bien que toute autre *sr* qui lui sera parallèle, demeurera immobile entre les deux plans inclinés *KN*, *MN*. C. Q. F. T.

Car si par le milieu ou centre de gravité *P* de la droite *SR* on mène entre les deux lignes *SB*, *SC* une droite *AD* verticale ou parallèle à *BC*, cette droite *AD* sera coupée par la droite *SR* en deux parties égales aussi-bien que sa parallèle *BC*. Or les deux droites *AD*, *SR* se coupant mutuellement en deux parties égales, seront les deux diagonales d'un même parallélogramme *ASDR* : ainsi *AR* sera parallèle à *SC*, & par conséquent perpendiculaire au plan incliné *MN*.

La pesanteur de la droite *SR* réunie à son milieu ou centre de gravité *P*, agissant suivant la diagonale verticale *AD* par laquelle on la représentera, & pouvant être supposée appliquée à l'extrémité supérieure *A* de cette diagonale, se décomposera en deux forces représentées par les côtés *AS*, *AR* du parallélogramme *ASDR* : & comme les directions *AS*, *AR* de ces deux forces se trouveront perpendiculaires aux deux plans *KN*, *MN*, elles seront détruites par les résistances de ces plans; & la droite pesante *SR* demeurera par conséquent immobile entre les mêmes plans. *C. Q. F.* 1°. *D.*

Toute autre droite telle que *sr*, placée entre les

mêmes plans inclinés KN, MN parallèlement à SR; demeurera aussi immobile entre ces plans. Car si des extrémités de la droite sr on mène des perpendiculaires sa, ra aux deux plans inclinés KN, MN, & que par le point a l'on mène une verticale ap; toutes les lignes sr, sa, ra, ap de la figure asr, seront parallèles aux lignes correspondantes SR, SA, RA, AP de la figure ASR. Ainsi, de même que SR est coupée en deux parties égales par la verticale AP, la droite sr sera aussi coupée en deux parties égales par la verticale ap. Il y aura donc dans la verticale ap menée par le milieu ou centre de gravité p de la droite sr, un point a duquel on pourra mener perpendiculairement aux deux plans inclinés KN, MN deux droites as, ar qui passeront par les appuis de la droite sr sur ces deux plans : & comme les deux forces dans lesquelles on décomposera la pesanteur de la droite sr seront dirigées suivant les droites as, ar perpendiculaires aux deux plans inclinés, elles seront détruites par les résistances de ces plans, & la droite sr parallèle à SR demeurera par conséquent immobile. *C. Q. F.* 2°. *D.*

THÉOREME.

Fig. 140. 479. *Soit une sphère appuyée sur trois autres sphères. Si du centre* A *de la sphère appuyée l'on tire des droites* AB, AC, AD *aux centres des trois autres sphères, avec une ligne verticale* AF; *& qu'après avoir conduit par la verticale* AF *& par la droite* AD *un plan* EAD *qui rencontre le plan* BAC *dans la droite* AE, *l'on fasse un parallélogramme* AGFH *qui ait pour diagonale une partie* AF *de la verticale; & pour côtés des parties* AG, AH *des deux droites*

AD, AE; *enfin si dans le plan* BAC *l'on fait un second parallélogramme* AKHL *qui ait pour diagonale le côté* AH *du premier, & pour côtés contigus des parties* AK, AL *des deux droites* AC, AB:

La pesanteur de la sphère A	*seront proportionnelles à*	AF
La charge de la sphère D		AG
La charge de la sphère C		AK
La charge de la sphère B		AL.

DÉMONSTRATION.

Si l'on représente la pesanteur de la sphère *A* par la diagonale verticale *AF* du parallélogramme *AGFH*, elle se décomposera en deux autres forces représentées par les côtés *AG*, *AH* du même parallélogramme.

La force représentée par *AG* étant dirigée suivant la droite *AD* qui joint les centres des deux sphères *A*, *D*, & qui passe par conséquent par leur point d'attouchement, c'est-à-dire par un appui de la sphère *A*, sera la charge de la sphère *D*.

La force représentée par *AH* n'ayant point d'appui dans sa direction, se décompose en deux autres forces représentées par les côtés contigus *AK*, *AL* du parallélogramme *AKHL* dont *AH* est la diagonale : & comme les directions *AK*, *AL* de ces nouvelles forces sont sur les droites *AC*, *AB* qui vont du centre de la sphère *A* aux centres des deux sphères *C* & *B*, & qui passent par conséquent par les points où la sphère *A* s'appuie sur les deux dernières sphères; les nouvelles forces représentées par *AK*, *AL* seront les charges des deux sphères C, B. Il est donc prouvé que

La pesanteur de la sphère *A*	sont proportionnelles à	*AF*
La charge de la sphère *D*		*AG*
La charge de la sphère *C*		*AK*
La charge de la sphère *B*		*AL*.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Fig. 140. 480. Si les quatre sphères sont égales, si elles se touchent toutes, & que les droites *BC*, *BD*, *CD* qui joignent les centres des trois sphères inférieures, fassent un triangle horizontal; les trois sphères inférieures seront également chargées, & le poids de la sphère *A* sera à la charge de chacune des trois autres qui la porteront, comme la racine quarrée du nombre 6 est à l'unité.

Puisque chacune des quatre sphères touche les trois autres, & qu'elles sont toutes égales, les six droites *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* qui joignent leurs centres sont égales, & forment par conséquent les arêtes d'un tétraèdre régulier: & comme on suppose que le triangle équilatéral *BCD* qui sert de base à ce tétraèdre est horizontal, la verticale *AF* est perpendiculaire au plan de ce triangle, & passe par son milieu ou centre de gravité. La droite *ED*, suivant laquelle le plan vertical *ADE* coupe la base *BCD*, est donc divisée par la verticale *AF* en deux parties *EF*, *FD* qui sont entr'elles comme 1 & 2: ainsi en faisant $EF = 1$, on aura $FD = 2$, & $ED = 3$.

Mais les deux triangles *BCD*, *BCA* étant parfaitement égaux, on aura $ED = EA$, & par conséquent $EA = 3$. Donc le triangle rectangle *AFE*,

dans lequel on trouvera $\overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{EF}^2 = 9 - 1$, donnera $\overline{AF}^2 = 8$, & par conséquent $AF = \sqrt{8}$.

Le triangle rectangle *AFD*, dans lequel on trouvera $\overline{AD}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FD}^2 = 8 + 4$, donnera $\overline{AD}^2 = 12$, & par conséquent $AD = \sqrt{12}$.

La verticale *AF* ayant été prise pour la diagonale du parallélogramme *AGFH*, les droites *AE*, *GF* sont parallèles, & les côtés *ED*, *AD* du triangle *ADE* sont par conséquent coupés en parties proportionnelles par *FG*. Ainsi puisque *EF* est le tiers de *ED*, *AG* sera pareillement le tiers de *AD* ou de $\sqrt{12}$. On aura donc $AF : AG :: \sqrt{8} : \frac{1}{3}\sqrt{12}$. ou $:: 3\sqrt{8} : \sqrt{12}$ ou $:: \sqrt{72} : \sqrt{12}$ ou enfin $:: \sqrt{6} : 1$.

Donc puisque la sphère *A* presse également les trois sphères inférieures *B*, *C*, *D* par rapport auxquelles elle est semblablement placée, & que le poids de la sphère *A* est à la charge de la sphère *D*, comme *AF* est à *AG*, c'est-à-dire comme $\sqrt{6}$ est à 1; il est évident que le poids de la sphère *A*, est à la charge de chacune des trois autres qui la portent, comme la racine quarrée du nombre 6 est à l'unité.

THÉOREME.

481. *Soit une roue* ADEB e d A *garnie d'une infinité de rayons courbes* CMD, CPI, CNE, &c. *semblables, égaux & également distribués autour de son centre* C *sur lequel on la suppose en équilibre & mobile sans aucun frottement; que chaque rayon courbe tel que* CPI *enfile un petit corps* P *qui puisse glisser le long de ce rayon sans aucune résistance de la part du* Fig. 141

frottement ; & que tous ces petits corps qu'on suppose égaux & poussés vers un même centre F *de pesanteur, suivant quelle loi l'on voudra, mais également à distances égales de ce centre, ne puissent se mouvoir & faire tourner la roue sans suivre un canal immobile* L M N l n m L *de courbure quelconque ; on va démontrer que cette roue demeurera en équilibre.*

DÉMONSTRATION.

Du point *F* comme centre, vers lequel sont poussés tous les petits corps égaux dont la roue est chargée, soient décrits deux arcs concentriques *Mm*, *Nn* infiniment proches l'un de l'autre. Il sera démontré que la roue doit demeurer immobile, si l'on fait voir que les petits corps contenus dans les deux portions correspondantes & infiniment petites *M N*, *m n* du canal courbe *L M N l n m L*, se soûtiennent mutuellement en équilibre.

Chaque petit corps P contenu dans la portion *M N* du canal courbe, étant soûtenu, comme entre deux plans inclinés, par ce canal & par le rayon courbe *C P I* qui le traverse, sa pesanteur dirigée suivant *P F* se décomposera en deux forces dirigées suivant des droites *P R*, *P S* perpendiculaires aux parties infiniment petites *P O*, *M N* du rayon courbe *C P I* & du canal, lesquelles peuvent être regardées comme des lignes droites ; & comme la dernière de ces deux forces trouvera un obstacle invincible dans le canal qu'on suppose immobile, il ne restera que la force dirigée suivant la droite *P R* perpendiculaire à la partie *P O* du rayon courbe *C P I*, & cette force tendra à faire tourner la roue dans le sens *A D E B*.

La pesanteur du petit corps *P* dirigée suivant *P F*,

& les deux forces dirigées ſuivant *PR*, *PS* dans leſquelles on la décompoſe, étant perpendiculaires aux trois côtés *NO*, *PO*, *PN* du triangle *NOP* qu'on peut regarder comme rectiligne, puiſque ſes trois côtés ſont des portions infiniment petites de courbes, ſont (*n*°. 233) proportionnelles à ces côtés; en ſorte que ſi l'on nomme *P* la peſanteur du petit corps *P*, & *R* la force qui en réſulte perpendiculairement à la partie *PO* du rayon courbe *CPI*, on aura *P* : *R* : : *NO* : *PO*.

Les deux rayons courbes *CPI*, *CMD* égaux & ſemblables, étant infiniment proches l'un de l'autre, leurs parties infiniment petites *PO*, *MH* peuvent être regardées comme deux droites parallèles; ainſi les triangles *NOP*, *NHM* ſeront ſemblables & donneront *NO* : *PO* : : *NH* : *MH*; & comme on vient de trouver *P* : *R* : : *NO* : *PO*, on aura auſſi *P* : *R* : : *NH* : *MH*. C'eſt-à-dire que la peſanteur de chaque petit corps *P* contenu dans la portion *MN* du canal courbe, eſt à la force qu'il exerce perpendiculairement ſur le rayon courbe par lequel il eſt enfilé, comme *NH* eſt à *MH*; d'où il ſuit que la ſomme des forces centrales de tous les petits corps renfermés dans *MN*, eſt à la ſomme des forces qu'ils exercent ſur les rayons courbes qui les traverſent, comme *NH* eſt à *MH*.

On démontrera de la même manière que la ſomme des forces centrales de tous les petits corps *p* contenus dans la portion correſpondante *mn* du canal courbe, eſt à la ſomme des forces qu'ils exercent perpendiculairement ſur les rayons courbes qui les enfilent, comme *nh* eſt à *mh*.

Quelle que ſoit la loi ſuivant laquelle les petits

corps égaux enfilés par les rayons courbes de la roue ſont pouſſés vers le centre *F* des forces, tous ceux qui ſe trouvent dans les deux parties correſpondantes infiniment petites *MN*, *mn* du canal, ſont pouſſés avec des forces égales, puiſqu'on doit les regarder comme également éloignés du centre *F*, & que (*hyp.*) la force centrale agit également à diſtances égales de ce centre. Ainſi les deux ſommes de forces centrales avec leſquelles les petits corps égaux contenus dans les deux portions correſpondantes *MN*, *mn* du canal courbe ſont pouſſés vers le centre *F* des forces, ſont proportionnelles aux nombres des petits corps contenus dans ces deux portions du canal courbe, ou aux nombres des rayons courbes renfermés dans les deux ſecteurs curvilignes *DCE*, *dCe*, ou aux grandeurs des arcs *DE*, *de* de ces ſecteurs; en ſorte que ces deux ſommes de forces centrales peuvent être repréſentées par les deux arcs *DE*, *de*.

Donc ſi l'on fait deux proportions dont les trois premiers termes ſoient $\left\{\begin{matrix} NH : MH :: DE \\ nh : mh :: de \end{matrix}\right\}$, les deux quatrièmes termes $\frac{DE \times MH}{NH}$, $\frac{de \times mh}{nh}$ de ces proportions, feront les ſommes des forces que les corps renfermés dans les deux portions *MN*, *mn* du canal courbe, exerceront perpendiculairement ſur les rayons courbes qui les enfilent.

La portion *MN* du canal courbe étant infiniment petite, tous les petits corps qu'elle contient ſont réputés également éloignés du centre *C* de la roue; ainſi on peut imaginer qu'ils ſont tous appliqués au même point *N* du rayon courbe *CNE*, & qu'ils agiſſent tous ſuivant une perpendiculaire *KN* à ce

rayon courbe avec la somme des forces que chacun d'eux exerce perpendiculairement sur son rayon, c'est-à-dire avec une force totale exprimée par $\frac{DE \times MH}{NH}$, qui tendra à faire tourner la roue dans le sens *ADEB*.

Par la même raison, l'on peut imaginer que tous les petits corps renfermés dans la portion *mn* du canal courbe, sont réunis au même point *n* du rayon courbe *Cne*, & qu'ils agissent suivant une perpendiculaire *nk* à ce rayon courbe, avec la force $\frac{de \times mh}{nh}$ pour faire tourner la roue dans le sens opposé *AdeB*.

Du centre *C* de la roue soient menées des perpendiculaires *CK*, *Ck* sur les directions *KN*, *nk* des deux forces $\frac{DE \times MH}{NH}$, $\frac{de \times mh}{nh}$ qui tendent à faire tourner la roue en sens contraires, & que les deux portions *CXN*, *Cxn* des rayons courbes, prises ensemble, soient considérées comme un levier appuyé sur le centre *C* de la roue : les deux forces $\frac{DE \times MH}{NH}$, $\frac{de \times mh}{nh}$ seront en équilibre (nº. 221), si elles sont réciproquement proportionnelles aux deux perpendiculaires *CK*, *Ck* tirées sur leurs directions. Ainsi le reste de la démonstration du Théorème se réduit à faire voir la vérité de cette proportion $\frac{DE \times MH}{NH} : \frac{de \times mh}{nh} :: Ck : CK$.

Par les deux points *M*, *m* soient tirées deux droites *MF*, *mF* au centre *F* des forces : les deux triangles *MGH*, *NTH* seront semblables ; car outre qu'ils auront un angle commun en *H*, ils seront rectangles

l'un en *G*, l'autre en *T*. 1°. Le triangle *MGH* sera rectangle en *G*, puisque la droite *MGF* passe par le centre du petit arc *NH*. 2°. Le triangle *NTH* sera rectangle en *T*; car les deux rayons courbes *CNE*, *CMD* étant infiniment proches l'un de l'autre, la droite *KN* menée par le point *N* perpendiculairement sur le rayon courbe *CNE*, sera aussi perpendiculaire au rayon courbe *CMD*, & par conséquent l'angle *NTH* sera droit. Par les mêmes raisons les deux triangles *mgh*, *nth* seront aussi semblables.

Les deux triangles *MGH*, *NTH* étant semblables; il y aura même rapport de *MH* à *NH* que de *MG* à *NT*, c'est-à-dire qu'on aura $\frac{MH}{NH} = \frac{MG}{NT}$; & comme les deux triangles semblables *mgh*, *nth* donneront aussi $\frac{mh}{nh} = \frac{mg}{nt} = \frac{MG}{nt}$, on aura $\frac{MH}{NH} : \frac{mh}{nh} :: \frac{MG}{NT} : \frac{MG}{nt}$ ou $:: \frac{1}{NT} : \frac{1}{nt}$.

Tous les rayons courbes de la roue étant semblables, les arcs concentriques *DE*, *NQ* compris entre deux quelconques *CMD*, *CNE* de ces rayons courbes seront semblables; & comme les arcs semblables sont proportionnels aux rayons de leurs cercles, on aura $DE : CV :: NQ : CN$. Mais les triangles *NTQ*, *CKN* ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, seront aussi semblables & donneront $NQ : CN :: NT : CK$.

On aura donc . . . . . $DE : CV :: NT : CK$, & par les mêmes raisons Cu ou $CV : de :: Ck : nt$.

Ainsi en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $DE : de :: Ck \times NT : CK \times nt$,

Mais on a trouvé $\frac{MH}{NH} : \frac{mh}{nh} :: \frac{1}{NT} : \frac{1}{nt}$.

Donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $\frac{DE \times MH}{NH} : \frac{de \times mh}{nh} :: Ck : CK$; c'est-à-dire que les deux sommes de forces avec lesquelles les corps renfermés dans les deux portions correspondantes *MN*, *mn* du canal courbe font effort pour faire tourner la roue en sens contraires, & qu'on a réduites à deux forces $\frac{DE \times MH}{NH}$, $\frac{de \times mh}{nh}$ appliquées aux extrémités du levier *NCn*, & dirigées suivant *KN*, *nk*, sont réciproquement proportionnelles aux perpendiculaires menées de l'appui *C* sur leurs directions, & sont par conséquent en équilibre.

Comme on peut démontrer de la même manière que les petits corps contenus dans toutes les autres portions correspondantes du canal courbe comprises entre des arcs concentriques décrits du point *F* comme centre, se soûtiendront mutuellement en équilibre, il est évident que la roue *ADEBedA* demeurera en équilibre. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

482. Comme on n'a point assigné de courbure particulière aux rayons de la roue par lesquels sont enfilés tous les petits corps égaux dont la roue est chargée, la nature & la quantité de courbure de ces rayons n'influera point sur l'équilibre du système : ainsi on pourra les supposer si peu courbes qu'on voudra ; on pourra même diminuer leur courbure à l'infini, jusqu'à les rendre des lignes droites, sans troubler l'équilibre qu'on vient de démontrer. Fig. 141.

COROLLAIRE II.

Fig. 141. 483. Si tous les petits corps égaux enfilés par les rayons droits ou également courbes de la roue, sont poussés en même temps vers deux centres *F*, *f* de forces; par exemple, si tous les petits corps égaux sont de fer, que le point *F* soit le centre de la terre vers lequel tendent à descendre avec des forces égales tous les corps égaux qui en sont également éloignés, & que le point *f* soit une pierre d'aimant qui agisse également sur les mêmes petits corps à des distances égales; le système de la roue chargée de tous ces petits corps demeurera encore en équilibre.

Car les actions de la pierre d'aimant étant égales à des distances égales du point *f* où est situé son centre de force, mettront (*n*°. 481) tout le système en équilibre; en sorte que la force résultante de toutes ces actions sera détruite par la résistance de l'appui ou centre *C* de la roue, & sera par conséquent dirigée vers ce centre. Et comme la pesanteur, en agissant également à distances égales de son centre *F* sur toutes les parties égales du même système, mettra aussi ce système en équilibre, la force résultante de toutes ces actions sera pareillement détruite par la résistance de l'appui ou centre *C* de la roue, & sera par conséquent aussi dirigée vers ce centre. Ainsi de toutes les forces avec lesquelles la pesanteur & la pierre d'aimant agiront sur tout le système de la roue, il ne résultera que deux forces qui passeront par le centre de cette roue, & qui étant détruites par la résistance de ce centre, ne pourront pas faire tourner la roue; d'où il suit que cette roue demeurera en équilibre.

On prouvera de la même manière que le système

de la roue ne tournera point, lorſque les corps égaux enfilés par les rayons droits ou courbes de cette roue ſeront pouſſés vers un plus grand nombre de centres de forces; puiſque chaque centre de forces produira ſur la roue & ſur tous les corps dont elle ſera chargée, le même effet qu'une ſeule force dirigée par le centre de cette roue, & que l'effort compoſé de toutes ces forces paſſera par conſéquent par le centre de la roue & y trouvera une réſiſtance invincible.

Remarque.

484. Tous les petits corps égaux enfilés par les rayons droits ou également courbes de la roue *ADEBedA* qu'on ſuppoſe mobile ſur ſon centre C ſans aucune réſiſtance de la part du frottement, ne pouvant ſe mouvoir & faire tourner la roue ſans ſuivre le canal immobile *LMNlnmL* de courbure quelconque; ſi tous les points de la partie *LMNl* de ce canal ſont plus proches du centre de la roue, que ceux de l'autre partie *Lmnl* du même canal, il eſt évident que les corps qui ſeront d'un côté de la roue ſeront plus proches de ſon centre que ceux qui ſe trouveront de l'autre côté: & comme le ſyſtème de la roue & des petits corps égaux dont tous ſes rayons ſeront chargés, ſera cependant en équilibre, on voit clairement combien ſe trompent quelques Machiniſtes, qui peu inſtruits des vrais principes de l'équilibre, s'imaginent qu'on auroit le mouvement perpétuel purement méchanique, ſi l'on avoit une roue dont les rayons uniformément diſtribués fuſſent chargés de corps égaux, & qu'on pût faire en ſorte que les corps placés d'un côté de la roue fuſſent conſtamment plus proches de ſon centre que ceux qui ſeroient de l'autre côté. Fig. 141.

On voit encore combien ceux-là se trompent, qui croient pouvoir procurer un mouvement perpétuel purement méchanique à la même roue, en employant plusieurs principes de forces centrales, tels que la pesanteur, l'attraction de l'aimant, & celle des corps électriques. Car chacune de ces forces agissant également à distances égales de son centre; & ne pouvant donner au système de la roue qu'une force résultante dirigée par son appui, ce système doit nécessairement demeurer immobile.

Avertissement.

485. Jusqu'ici l'on n'a considéré que des corps soûtenus en équilibre entre des plans inclinés sans le secours d'aucune autre force que la résistance de ces plans; on va maintenant examiner l'équilibre d'un corps qui a besoin d'être poussé ou tiré par quelque puissance pour être soûtenu sur deux plans où il a des appuis.

Comme on ne prétend donner qu'un traité élémentaire de l'équilibre, & qu'on n'a pas dessein d'examiner à fond tous les cas qui peuvent arriver, on se réduira à deux plans inclinés d'un même côté qui se rencontreront dans une droite horizontale. On imaginera que ces plans sont tous deux coupés perpendiculairement par un même plan vertical *LMNO*: & que les appuis *E*, *F* du corps *P* sur ces plans sont dans le plan vertical *LMNO*.

Fig. 142, 143, 144 & 145.

Les droites *MN*, *NO* représenteront donc les rencontres des deux plans inclinés avec le plan vertical qui leur est perpendiculaire, & le point *N* représentera la section commune horizontale de ces deux plans inclinés.

THÉOREME.

THÉOREME.

486. *Lorsqu'un corps pesant est soûtenu par une puissance* R *sur deux plans inclinés* MN, NO *qu'il touche en deux points* E, F *situés dans un plan vertical* LMNO *perpendiculaire à ces deux plans; si par les points d'appui* E, F *l'on mène des perpendiculaires* EG, FG *aux deux plans inclinés, lesquelles étant nécessairement dans le plan vertical* LMNO *perpendiculaire à ces deux plans, se rencontreront en quelque point* G; *& qu'après avoir tiré par le centre de gravité* P *du corps pesant une verticale* AB *qui rencontrera la direction de la puissante* R *en quelque point* A, *l'on tire par les points* G, A *une droite* GAD, *& que sur une partie quelconque* AD *de cette droite, prise pour diagonale, on fasse un parallélogramme* ABDC *dont les côtés contigus* AB, AC *soient pris sur la verticale menée par le centre de gravité* P *du corps pesant, & sur la direction de la puissance* R; *la pesanteur du corps & la puissance* R *qui le retiendra sur les deux plans, seront proportionnelles aux côtés* AB, AC *du parallélogramme* ABDC. Fig. 142, 143 & 144.

Si l'on prend encore sur la droite GAD *à commencer du point* G, *une partie* GQ = AD, *pour en faire la diagonale d'un second parallélogramme* GXQY *qui ait les côtés contigus sur les deux droites* GE, GF; *la pesanteur du corps, & les charges des deux plans* MN, NO *seront proportionnelles aux trois droites* AB, GX, GY; *en sorte que*

La pesanteur du corps	*seront proportionnelles aux quatre droites*	AB
La puissance R		AC
La charge du plan MN		GX
La charge du plan NO		GY.

DÉMONSTRATION.

Le corps *P* étant retenu au moyen d'une puiſſance *R* ſur les deux plans inclinés *MN*, *NO*, la force réſultante de la peſanteur *P* de ce corps & de la puiſſance *R*, ſera égale & directement oppoſée à la réſultante des deux réſiſtances que feront les deux points *E*, *F* par leſquels le corps ſera appuyé ſur les deux plans inclinés; ainſi ces deux réſultantes ſeront dans une même ligne droite, & paſſeront par conſéquent par les mêmes points.

Or 1°. les deux points *E*, *F* réſiſtent ſuivant des directions *EG*, *FG* perpendiculaires aux deux plans inclinés *MN*, *NO*; ainſi la réſultante de ces deux réſiſtances paſſera par le point *G* où ſe rencontreront les deux droites *EG*, *FG*.

2°. La peſanteur du corps réunie à ſon centre de gravité *P* & dirigée ſuivant la verticale *AB* menée par ce centre de gravité, devant compoſer avec la puiſſance *R* une force réſultante oppoſée à celle des réſiſtances des deux plans *MN*, *NO*; les directions de cette peſanteur & de la puiſſance *R*, ſe rencontreront néceſſairement en quelque point *A* par lequel paſſera la réſultante de ces deux forces.

Donc la réſultante des réſiſtances des deux plans *MN*, *NO*, & celle qui naîtra de la peſanteur du corps combinée avec la puiſſance *R*, paſſeront toutes deux par les mêmes points *G*, *A*, & ſeront par conſéquent dirigées l'une ſuivant *DAG*, l'autre ſuivant *AD*.

La réſultante de la peſanteur du corps *P* & de la puiſſance *R* étant dirigée ſuivant *AD*, & étant

représentée par une partie *AD* de sa direction, la pesanteur de ce corps & la puissance *R* seront nécessairement représentées par les côtés contigus *AB*, *AC* du parallélogramme *ABDC*; & l'on aura par conséquent *P* : *R* :: *AB* : *AC*.

La résultante de la pesanteur du corps *P* combinée avec la puissance *R*, étant représentée par *AD*, & étant égale à la résultante des résistances des deux plans *MN*, *NO*; si sur la direction de cette dernière, on prend une partie $GQ = AD$, cette résultante sera représentée par *QG*; en sorte que si l'on fait un parallélogramme *GXQY* qui ait *GQ* pour diagonale, & dont les côtés *GX*, *GY* soient pris sur les directions *EG*, *FG* des résistances des deux plans *MN*, *NO*, les résistances de ces deux plans seront représentées par *GX*, *GY*: d'où il suit que

La pesanteur du corps *P*	seront proportionnelles aux lignes	*AB*
La puissance *R* qui le retiendra		*AC*
La résistance du point *E*, ou la charge du plan *MN*		*GX*
La résistance du point *F*, ou la charge du plan *NO*		*GY*.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

487. Si la verticale *AB* menée par le centre de gravité *P* du corps pesant, & la direction de la puissance *R*, se rencontrent dans un point de la droite *FG* qu'on a menée par l'appui *F* perpendiculairement au plan incliné *NO*; la résultante de la pesanteur de ce corps & de la puissance *R* sera directement opposée à la direction *FG* de la résistance Fig. 141.

du plan *NO*: ainsi le point *F* de ce plan soûtiendra seul toute la charge, & le plan *MN* ne portera rien, & sera par conséquent inutile pour le soûtien du corps *P*.

Fig. 144. Par la même raison si le point *A*, où la direction verticale *AB* de la pesanteur du corps *P* rencontre celle *AR* de la puissance *R*, est dans la direction *EG* de la résistance du plan *MN*; la résultante *AD* de la pesanteur du corps & de la puissance *R* sera dirigée perpendiculairement sur le plan *MN*: ainsi ce plan portera toute la charge, & le plan *NO* ne portant rien, deviendra inutile au soûtien du corps.

Fig. 142. Mais si le point *A* est au dedans de l'angle *EGF*, les deux plans *MN*, *NO* seront chargés proportionnellement aux deux côtés *GX*, *GY* du parallélogramme *GXQY*; en sorte que si la droite *GAD* divise l'angle *EGF* en deux parties égales, les deux plans *MN*, *NO* seront également chargés. Si au contraire la droite *GAD* divise l'angle *EGF* en deux parties inégales, les deux plans *MN*, *NO* seront chargés inégalement, & le plan *MN* sera plus ou moins chargé que le plan *NO*, suivant que l'angle *EGA* sera plus petit ou plus grand que l'angle *FGA*.

COROLLAIRE II.

Fig. 145. 488. Si le corps pesant soûtenu par la puissance *R* sur les deux plans *MN*, *NO* est sphérique & homogène, les deux perpendiculaires menées par les appuis *E*, *F* de ce corps sur ces plans, passeront par son centre *P* de figure qui sera aussi son centre de gravité; ainsi la résultante de ces deux résistances passera par le même centre *P* de figure & de gravité

du corps pesant. Et comme la direction de la pesanteur du corps passera encore par le même point *P*, la résultante des résistances des deux plans *MN*, *NO*, & de la pesanteur du corps, passera nécessairement par ce point *P*; d'où il suit que la direction de la puissance *R* qui doit retenir en équilibre le poids du corps & les résistances des deux plans *MN*, *NO*, & qui doit par conséquent être égale & directement opposée à la résultante de ces trois forces, passera par le même centre *P* de figure & de gravité du corps pesant.

Comme le même point *P* où se rencontrent la direction de la pesanteur du corps & celle de la puissance *R*, peut être considéré indifféremment, soit dans la perpendiculaire *EP* au plan *MN*, soit dans la perpendiculaire *FP* au plan *NO*, soit enfin dans l'ouverture de l'angle *EPF*; quelle que soit la direction de la puissance *R*, il pourra arriver (*n*°. 487) ou que le plan *MN* sera le seul chargé, ou que le plan *NO* sera le seul chargé, ou enfin que la charge se distribuera également ou inégalement aux deux plans *MN*, *NO*.

Ayant fait un parallélogramme *PBDC* qui ait pour côtés contigus des parties *PB*, *PC* des directions de la pesanteur du corps *P* & de la puissance *R*, & dont la diagonale *DP* se trouve sur la direction *EP* de la résistance du plan *MN*; si les quantités de force de la pesanteur du corps *P* & de la puissance *R*, se trouvent proportionnelles aux côtés *PB*, *PC* de ce parallélogramme, leur résultante sera dirigée suivant la diagonale *PD* perpendiculaire au plan *MN*, le plan *MN* sera le seul chargé, & le plan *NO* deviendra inutile.

Si après avoir fait un parallélogramme *PBdc* dont les côtés contigus *PB*, *Pc* soient pris sur les directions de la pesanteur & de la puissance *R*, sa diagonale se trouve sur la direction *FP* de la résistance du plan *NO*, & que les quantités de force de la pesanteur du corps *P* & de la puissance *R* soient proportionnelles aux côtés contigus *PB*, *Pc* de ce parallélogramme; leur résultante sera dirigée suivant la diagonale *Pd* du même parallélogramme : & comme cette résultante sera perpendiculaire au plan *NO*, ce plan portera seul toute la charge, & le plan *MN* deviendra inutile.

Enfin après avoir fait un parallélogramme *PBδ*ʌ qui ait encore pour côtés contigus des parties *PB*, *P*ʌ des directions de la pesanteur du corps pesant & de la puissance *R*, & dont la diagonale *Pδ* soit renfermée dans l'angle *EPF*; si les quantités de force de la pesanteur du corps *P* & de la puissance *R* sont proportionnelles aux côtés contigus *PB*, *P*ʌ de ce parallélogramme, les deux plans *MN*, *NO* seront chargés également ou inégalement, suivant que la diagonale *Pδ* divisera l'angle *EPF* en deux parties égales ou inégales. Dans ce dernier cas, si l'on fait un second parallélogramme *PXδY* qui ait la même diagonale *Pδ* que le premier *PBδ*ʌ, & dont les côtés contigus *PX*, *PY* soient pris sur les directions des résistances des deux plans *MN*, *NO*, les côtés contigus *PX*, *PY* de ce parallélogramme représenteront les résistances ou les charges de ces plans.

Il suit de là qu'un même corps sphérique peut être retenu en équilibre entre deux plans *MN*, *NO* inclinés d'un même côté, par une infinité de puissances différentes qui pourront avoir la même direction; &

qu'en représentant la pesanteur du corps par *PB*, la plus grande de toutes les puissances dirigées suivant *PR* qui pourront soûtenir le corps, sera représentée par le côté *PC* du parallélogramme *PBDC* dont la diagonale est prise sur *EP*, & que la plus petite de ces puissances sera représentée par le côté *Pc* du parallélogramme *PBdc* dont la diagonale *Pd* est prise sur la droite *FP* perpendiculaire au plan *NO*.

REMARQUE.

On a supposé dans le dernier Théorème & ses Corollaires, que les deux droites *EG*, *FG* menées par les appuis *E*, *F* du corps pesant perpendiculairement sur les deux plans inclinés *MN*, *NO*, étoient dans un même plan vertical *MNO*, & l'on a par conséquent aussi supposé que les deux plans *MN*, *NO* se rencontroient dans une ligne horizontale dont on ne voyoit que l'extrémité *N*: mais il peut arriver que ces perpendiculaires *EG*, *FG* ne soient point dans un même plan. Dans ce cas la direction *AB* de la pesanteur du corps réunie à son centre de gravité *P*, & celle de la puissance *R* ne se rencontreront point; alors il faudra réduire à deux forces seulement trois des quatre forces, savoir, de la résistance du plan *MN*, de la résistance du plan *NO*, de la pesanteur du corps *P*, & de la puissance *R*; & dans le cas où le corps pesant sera retenu en équilibre par la puissance *R* sur les deux plans *MN*, *NO*, la quatrième de ces forces sera égale & directement opposée à la résultante des deux forces auxquelles on aura réduit les trois premières. Fig. 142 143 & 144.

CHAPITRE III.

Des Corps pesans qui se retiennent mutuellement en équilibre sur des plans.

Fig. 146. 489. Lorsque deux corps pesans P, Q attachés ensemble par un cordon droit *E F* se retiennent mutuellement en équilibre sur deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH*; ils tirent avec des quantités de force égales le cordon *E F* qui les assemble, sans quoi l'un l'emporteroit sur l'autre, & ils ne resteroient point immobiles; & la force avec laquelle chaque corps tire, peut être regardée comme une puissance qui retient l'autre corps en équilibre sur le plan incliné où il est placé.

En considérant ainsi comme des puissances égales de directions opposées les forces avec lesquelles les corps pesans *P*, Q tirent la corde *EF*, & en menant par les centres de gravité de ces deux corps les verticales *PX*, *QY*, & par les points *G*, *L*, où ces verticales rencontrent la direction du cordon *EF*, les droites *GR*, *LS* perpendiculairement aux deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH*; il est clair, par les principes du premier Chapitre, que la verticale *PX* qui est la direction naturelle de la pesanteur du corps *P*, la direction de la corde *E F* ou de la puissance qui retient ce corps sur le plan incliné *ABCD*, & la droite *GR* menée par un point de la base du corps *P* perpendiculairement sur ce plan, & suivant laquelle doit être dirigée la charge du même plan, sont nécessairement dans un même plan vertical *EGXR*.

Par les mêmes principes du premier Chapitre, la verticale *QY* qui eſt la direction propre de la peſanteur du corps Q, la direction *FE* de la corde ou de la puiſſance qui retient ce corps ſur le plan incliné *IBCH*, & la droite *LS* menée par un point de la baſe du même corps perpendiculairement à ce plan, & ſuivant laquelle doit être dirigée la charge du même plan, ſeront auſſi dans un même plan vertical *FLYS*.

Les deux plans verticaux *EPXR*, *FLYS* étant dirigés ſuivant une même droite *EF* qui n'eſt point verticale, ne compoſent enſemble qu'un ſeul & même plan. Ainſi la direction *EF* de la corde qui aſſemble les deux corps peſans *P*, Q, les verticales *PX*, *QY* menées par les centres de gravité de ces deux corps, & les droites *GR*, *LS* menées par les rencontres *G*, *L* de ces verticales avec la direction du cordon *EF* perpendiculairement ſur les deux plans inclinés, ſont néceſſairement dans un même plan vertical; & ce plan vertical eſt perpendiculaire aux deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH*, puiſqu'il paſſe par les deux droites *GR*, *LS* perpendiculaires à ces deux plans.

Lorſqu'on aura à conſidérer deux corps peſans *P*, Q qui ſe retiendront mutuellement en équilibre par le moyen d'un cordon *EF*, il faudra donc toûjours imaginer par les centres de gravité de ces deux corps un plan vertical & perpendiculaire aux deux plans inclinés, lequel paſſera néceſſairement par les appuis des deux corps ſur ces plans.

Le plan vertical mené par les centres de gravité des deux corps *P*, Q étant perpendiculaire aux deux plans inclinés, ces deux plans ſeront réciproquement perpendiculaires ſur lui. Ainſi la ſection commune

BC des deux plans inclinés sera perpendiculaire au plan vertical (*Géom. n°*. 423), & sera par conséquent une ligne horizontale : d'où il suit que deux corps pesans assemblés par un cordon *EF* ne peuvent pas se retenir mutuellement en équilibre sur deux plans inclinés, à moins que la droite *BC* où ces deux plans se rencontrent ne soit horizontale.

Tout ce qu'on peut considérer, lorsque deux corps assemblés par un cordon se retiennent mutuellement en équilibre sur deux plans inclinés, étant renfermé dans le plan vertical mené par les centres de gravité de ces deux corps, on ne représente des plans inclinés que les droites *MN*, *MK* où ils sont coupés par le plan vertical; & prenant ces droites qui se rencontrent en un point *M* pour les longueurs des deux plans, on termine ces plans par le bas au moyen d'une ligne horizontale *NK*. Enfin ayant tiré du point *M* une perpendiculaire *MO* sur l'horizontale *NK*, les droites *MN*, *NK* se nomment les longueurs des deux plans inclinés; *NO* & *KO* s'appellent leurs bases; & la verticale *MO* est la hauteur commune de ces deux plans.

Fig. 147. S'il arrive qu'on ait à considérer des corps pesans qui assemblés par un cordon droit *EF* se retiennent mutuellement en équilibre sur des surfaces courbes, on imaginera par les points *R*, *S*, où les corps *P*, *Q* s'appuieront sur ces surfaces courbes, des plans *MN*, *MK* tangens à ces surfaces; & au lieu de regarder ces corps *P*, *Q* comme appuyés sur ces surfaces courbes, on supposera qu'ils s'appuient sur les plans *MN*, *MK* tangens à ces surfaces. Or il est évident par tout ce qui vient d'être dit, que si les deux corps pesans *P*, *Q* ne s'appuient chacun que par un seul

point sur les surfaces inclinées qui les soûtiennent, les plans tangens *MN*, *MK* menés par les deux points d'appui *R*, *S* doivent nécessairement se rencontrer dans une ligne horizontale.

490. Lorsque deux corps *P*, *Q* se retiendront mutuellement en équilibre sur deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH* au moyen d'un cordon *ERRF* qui les assemblera & qui passera sur une poulie *Z*; on pourra regarder le cordon *ERRF* comme deux cordons particuliers *ER*, *FR* tirés par deux puissances égales aux points *R*, *R* où ils toucheront la poulie *Z*. Alors chacun des deux corps pesans pouvant être consideré indépendamment de l'autre, il ne sera pas nécessaire que les deux verticales *GP*, *LQ* menées par les centres de gravité des deux poids, & les directions des cordons *ER*, *FR*, soient dans un même plan vertical. Mais il suffira, comme il a été dit dans le premier Chapitre, 1°. que la direction verticale *GP* de la pésanteur du corps *P*, la direction du cordon *ER*, & la droite *GV* menée perpendiculairement sur le plan *ABCD* par le point *G* où se rencontrent la verticale *GP* & la direction du cordon *ER*, soient dans un même plan vertical qui sera nécessairement perpendiculaire au même plan *ABCD*; 2°. que la verticale *LQ* menée par le centre de gravité de l'autre corps *Q*, la direction du cordon *FR*, & la perpendiculaire *LS* menée sur le plan *IBCH* par le point *L* où la direction du cordon rencontre la verticale *LQ*, soient aussi dans un même plan vertical qui peut être différent du premier, & qui sera nécessairement perpendiculaire sur le plan *IBCH*. On doit encore remarquer que les deux Fig. 148.

droites *GV*, *LS* menées perpendiculairement sur les deux plans *ABCD*, *IBCH* doivent néceſſairement paſſer par les points d'appui des corps *P*, Q ſur ces plans.

Les deux plans verticaux menés perpendiculairement aux deux plans inclinés *ABCD*, *IBCH* par les centres de gravité des deux corps *P*, Q, couperont les plans inclinés ſuivant les droites *MN*, *MK* qui ſeront les ſeules lignes à conſidérer dans ces plans. Les deux plans inclinés rencontreront auſſi un même plan horizontal *ADHI* qui les terminera ; & les plans verticaux couperont ce plan horizontal ſuivant deux droites *ON*, *OK* qui étant horizontales ſeront perpendiculaires à la ſection commune & verticale *MO* de ces plans verticaux. Enfin les droites *MN*, *MK* ſeront nommées les longueurs des deux plans inclinés ; les droites *ON*, *OK* ſeront appelées les baſes de ces plans ; & la verticale *MO* s'appellera la hauteur commune des mêmes plans.

Si les deux corps *P*, Q étoient ſoûtenus ſur deux ſurfaces courbes, & ſe retenoient mutuellement en équilibre par le moyen d'un cordon *ERRF* qui paſsât ſur une poulie *Z* ; on imagineroit par les appuis de ces corps ſur ces ſurfaces courbes des plans *ABCD*, *IBCH* tangens à ces ſurfaces, & conſidérant ces plans tangens comme des plans inclinés, on n'auroit aucun égard aux ſurfaces courbes par leſquelles les deux corps *P*, Q ſeroient véritablement ſoûtenus.

THÉOREME.

Fig. 149. 491. *Lorſque deux corps peſans* P, Q *aſſemblés par un cordon droit* EF, *ſe retiennent mutuellement en équilibre ſur deux plans inclinés* MN, MK *dont la*

rencontre doit être une ligne horizontale représentée par le point M; *si du point* M *on mène une droite* MO *perpendiculairement à la direction du cordon* EF,

La pesanteur du corps P	*seront proportionnelles aux droites*	ON.
La pesanteur du corps Q		OK
La tension du cordon EF		MO
La charge du plan MN		MN
La charge du plan MK		MK.

DÉMONSTRATION.

Soient représentés les poids des deux corps *P*, *Q* par . . . . *P*, *Q*.

Les charges qui en résulteront aux deux plans *MN*, *MK* par . . . . *C*, *S*.

La tension du cordon *EF* par . . . . . . *R*.

1°. La tension *R* du cordon *EF* faisant l'office d'une puissance qui retient le poids *P* en équilibre sur le plan incliné *MN*, l'on aura (*n°*. 457) $P : R : C :: ON : MO : MN$; c'est-à-dire qu'en représentant la tension du cordon *EF* par la droite *MO*, la pesanteur du poids *P* & la charge qui en résultera perpendiculairement au plan *MN*, seront représentées par les deux droites *ON*, *MN*.

2°. La même tension *R* du cordon *EF* faisant aussi l'office d'une puissance qui retient le corps Q en équilibre sur le plan incliné *MK*, on aura (*n°*. 457) $Q : R : S :: OK : MO : MK$; c'est-à-dire qu'en représentant la tension du cordon *EF* par la droite *MO*, la pesanteur du corps Q & la charge qui en résultera perpendiculairement au plan incliné *MK*, seront représentées par les deux droites *OK*, *MK*;

Ainsi en représentant constamment la tension du cordon *EF* par la droite *MO*, la pesanteur du corps *P*, celle du corps Q, la charge du plan *MN*, & celle du plan *MK*, seront représentées par *ON*, *OK*, *MN*, *MK*; & par conséquent

La pesanteu *P* du corps *P*	seront proportionnelles aux droites	*ON*
La pesanteur *Q* du corps *Q*		*OK*
La tension *R* du cordon *EF*		*MO*
La charge *C* du plan *MN*		*MN*
La charge *S* du plan *MK*		*MK*.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Fig. 149. 492. Si les deux corps *P*, Q sont de même pesanteur, la droite *MO* qu'on a tirée par le point *M* perpendiculairement sur le cordon *EF*, divisera en deux parties égales la ligne horizontale *NK* qui termine les deux plans inclinés par le bas. Car $P : Q :: ON : OK$; ainsi lorsqu'on aura $P = Q$; on aura aussi $ON = OK$.

Et réciproquement les deux corps *P*, Q qui se retiendront mutuellement en équilibre seront de même pesanteur, lorsque la droite *MO* menée par le point *M* perpendiculairement sur le cordon *EF*, divisera en deux parties égales la base totale *NK* des deux plans inclinés, c'est-à-dire lorsqu'on aura $ON = OK$.

COROLLAIRE II.

Fig. 150. 493. Si le corps *P* pesoit infiniment moins que le corps Q, *ON* deviendroit infiniment petit par

rapport à *OK*; ainsi le point *O* tomberoit en *N*, & la droite *MO* qu'on a menée perpendiculairement sur le cordon *EF* se confondroit avec le plan incliné *MN*; d'où il suit que le cordon *EF* seroit perpendiculaire à ce plan *MN*.

Et réciproquement si le cordon *EF* étoit perpendiculaire au plan *MN*, le poids *P* pèseroit infiniment moins que le poids Q.

COROLLAIRE III.

494. Si le cordon *EF* est horizontal, c'est-à-dire parallèle à la base totale *NK* des deux plans inclinés; la droite *MO* qu'on a tirée par le point *M* perpendiculairement sur ce cordon, sera verticale: elle sera donc la hauteur commune des deux plans inclinés terminés par l'horizontale *NK*; & les parties *ON*, *OK* de la droite *NK* seront les bases des mêmes plans inclinés. Fig. 151.

Comme dans ce cas on aura encore (*n*°. 491) P : Q : *R* : *C* : S :: *ON* : *OK* : *MO* : *MN* : *MK*, il est évident que

La pesanteur *P* du corps *P*	seront propor-tionnel-les à	la base *ON* du plan qui soûtient le corps *P*
La pesanteur *Q* du corps *Q*		la base *OK* du plan qui soûtient le corps *Q*
La tension R du cordon *EF*		la hauteur commune *MO* des deux plans
La charge C du plan *MN*		la longueur du plan *MN*
La charge *S* du plan *MK*		la longueur du plan *MK*.

THÉOREME.

495. *Lorsque deux corps pesans* P, Q, *assemblés par un cordon* ERRF *qui passe sur une poulie* RR, *se retiennent mutuellement en équilibre sur deux plans inclinés* MN, MK; *si par le point* M *où se rencontrent les* Fig. 152.

deux plans on mène des parallèles MH, MI *aux directions des deux parties* ER, FR *du cordon, &* *qu'après avoir abaissé du même point* M *une perpendiculaire* MO *sur les bases* ON, OK *des mêmes plans, on mène par le point* O *perpendiculairement aux deux plans* MN, MK, *deux droites* OH, OI *qui rencontrent en* H, I *les droites* MH, MI *parallèles à ces plans; on aura* P : Q :: MI : MH.

DÉMONSTRATION.

Par les centres de gravité des deux corps pesans *P*, Q soient imaginées des verticales *AB*, *GT*, & par les points *A*, *G* où ces verticales rencontrent les directions des deux parties de la corde, soient menées des perpendiculaires *AD*, *GS* aux deux plans inclinés. Puis ayant pris sur les directions des deux parties de la corde, deux parties égales *AC*, *GL* pour représenter les tensions égales de ces deux parties qui tirent avec des forces égales les deux poids *P*, Q, soient construits deux parallélogrammes *ABDC*, *GLST* dont les diagonales soient prises sur les deux droites *AD*, *GS* qu'on a menées perpendiculairement aux deux plans inclinés : il est clair (*n°.* 448) qu'en nommant *R* la tension de la corde,

on aura $\left\{\begin{array}{l} P : R :: AB : AC \text{ ou } :: CD : CA \\ R : Q :: LG : GT \text{ ou } :: LG : LS \end{array}\right\}$.

Mais les triangles *CAD*, *LGS* sont semblables aux triangles *MHO*, *MIO*, parce que les côtés des deux premiers sont parallèles aux côtés des deux derniers; ainsi l'on aura $\left\{\begin{array}{l} CD : CA :: MO : MH \\ LG : LS :: MI : MO \end{array}\right\}$, &

par conséquent $\left\{\begin{array}{l} P : R :: MO : MH \\ R : Q :: MI : MO \end{array}\right\}$.

Donc

Donc en multipliant ces deux dernières proportions par ordre, on aura enfin $P : Q :: MI : MH$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

496. Si les directions ER, FR des deux parties de la corde sont parallèles aux deux plans inclinés MN, MK, les droites MH, MI qu'on a menées parallèlement aux deux cordons ER, FR se confondront avec les parties correspondantes MV, MZ de ces deux plans inclinés; en sorte qu'on trouvera $P : Q :: MZ : MV$. Fig. 153.

Mais les triangles rectangles semblables MZO, MOK donneront	$MZ : MO :: MO : MK$.
Et les triangles rectangles semblables MON, MVO donneront	$MO : MV :: MN : MO$.
Ainsi en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura	$MZ : MV :: MN : MK$.
Donc puisqu'on vient de trouver	$P : Q :: MZ : MV$,
on aura aussi	$P : Q :: MN : MK$.

C'est-à-dire que les deux poids P, Q qui se retiendront mutuellement en équilibre, seront proportionnels aux longueurs des deux plans MN, MK qui les soûtiendront, si ces plans sont de même hauteur, & que les parties ER, FR du cordon $ERRF$ soient parallèles aux longueurs de ces plans inclinés.

On auroit pû démontrer ce Corollaire d'une manière plus simple, sans le conclurre du Théorème qui le précède.

Car en considérant séparément les deux corps pesans P, Q *& les plans inclinés* MN, MK *qui les soûtiennent, & supposant que ces deux corps sont retenus sur*

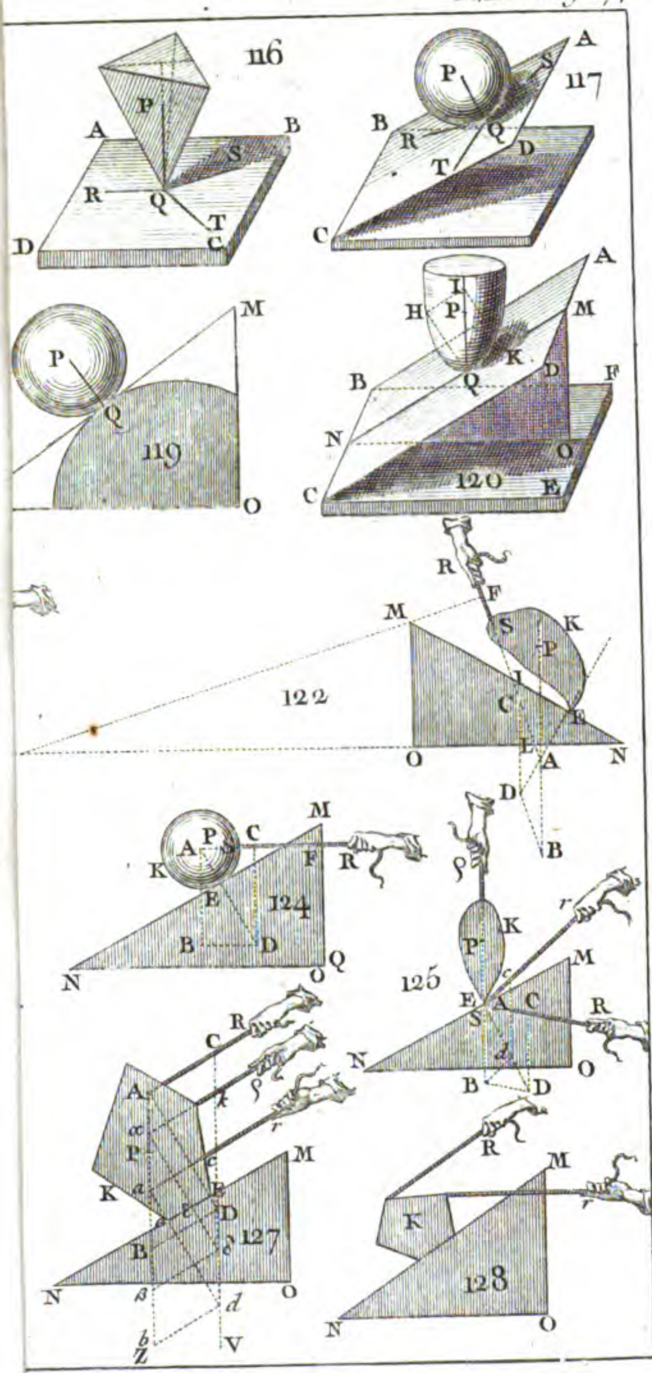
leurs plans par des puissances égales de directions parallèles à ces plans, on aura (n°. 459) $\left\{\begin{array}{l} P:R :: MN:MO \\ R:Q :: MO:MK \end{array}\right\}$. *Et multipliant ces deux proportions par ordre, on trouvera* P : Q :: MN : MK.

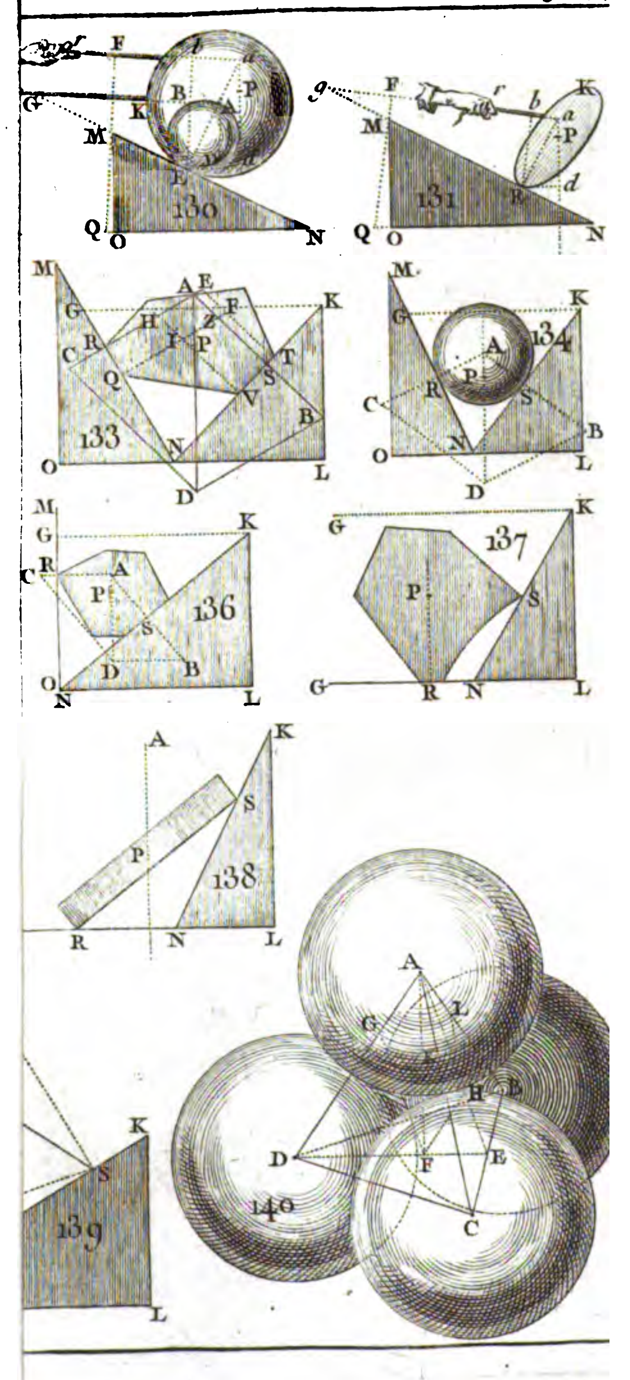
COROLLAIRE II.

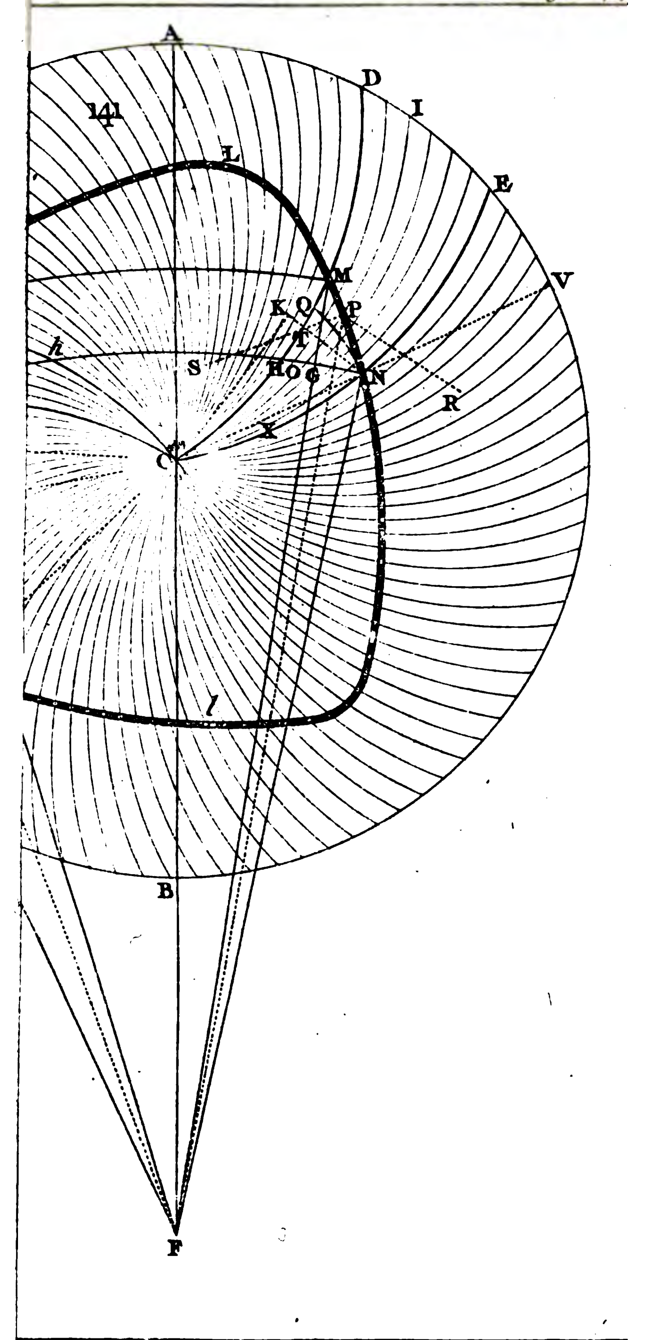
Fig. 153. 497. Lorsque les deux parties *ER*, *FR* de la corde *ERRF* qui retient les deux corps *P*, *Q* sur les deux plans inclinés *MN*, *MK* de même hauteur, sont parallèles aux longueurs de ces plans; si l'on nomme *D*, *S* les charges de ces deux plans, on aura (*n*°. 459) $\left\{\begin{array}{l} P:R:D :: MN : MO : ON \\ Q:R:S :: MK : MO : OK \end{array}\right\}$. Et comme dans ces deux suites de proportionnelles, la même puissance *R* est représentée par la même ligne *MO*, on pourra réduire ces deux suites à une seule *P*:*Q*:*R*:*D*:*S*: : *MN*:*MK*:*MO*:*ON*:*OK*, qui signifie que

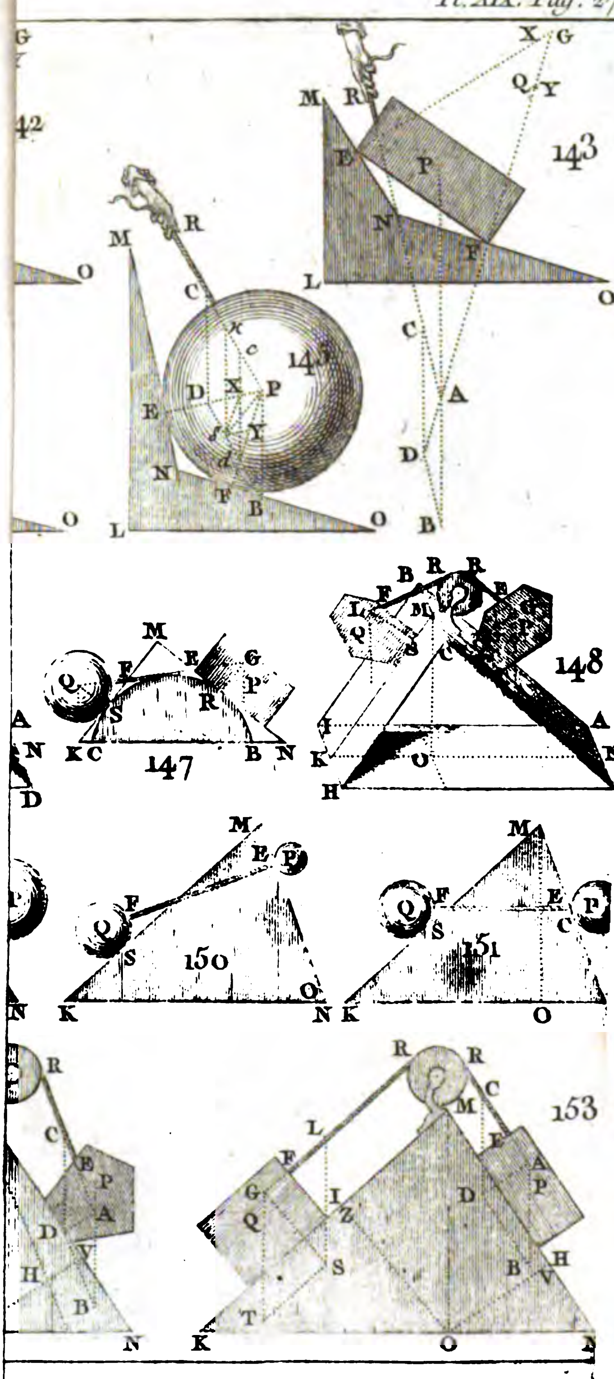
La pesanteur du corps *P*	sont proportionnelles à	la longueur *MN* du plan qui soûtient le corps *P*
La pesanteur du corps *Q*		la longueur *MK* du plan qui soûtient le corps *Q*
La tension du cordon *ERRF*		la hauteur commune *MO* des deux plans
La charge du plan *MN*		la base *ON* du plan *MN*
La charge du plan *MK*		la base *OK* du plan *MK*.

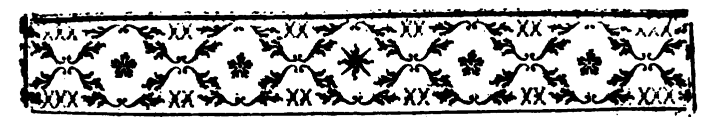



116
117
119
120
122
124
125
127
128


130
131
133
134
136
137
138
139
140


A
D
I
141
L
E
M
V
K
Q
P
T
h
S
H
O
G
N
R
X
C
l
B
F


143
145
147
148
150
151
153



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE HUITIEME.

De la Vis.

DÉFINITIONS.

498. LA *Vis* est un cylindre droit creusé extérieurement en spirale, en sorte qu'elle a la figure d'un cordon spiralement entortillé autour d'un cylindre droit moins gros que le premier de deux fois la grosseur ou la saillie du cordon. Fig. 154.

Le cordon spiral qui fait par-tout des angles égaux avec les lignes menées sur la surface du cylindre parallèlement à son axe, s'appelle *Filet de la Vis*; chaque tour de ce filet se nomme *Spire* ou *Hélice*; & la distance qu'il y a suivant la longueur du cylindre entre deux spires voisines, s'appelle *Hauteur du Pas de la Vis*, ou plus simplement *Pas de la Vis*.

Le diamètre du cylindre que l'on a creusé extérieurement pour former le cordon ou filet de la vis, s'appelle le *Diamètre de la Vis*.

On aura une idée assez juste du filet de la vis, à son relief près, en le regardant comme l'hypoténuse Fig. 155.

AB d'un triangle rectangle *ACB* roulé autour d'un cylindre *AMNO*, de manière que sa hauteur *AC* soit parallèle à l'axe de ce cylindre, & que sa base *CB* s'enveloppe toûjours sur la circonférence d'un même cercle du même cylindre.

En considérant que le filet de la vis est ainsi décrit, si l'on prend dans le triangle rectangle *ACB* d'autres triangles rectangles *AED*, *ECF*, &c. dont les hauteurs soient égales au pas de la vis, & dont les bases soient égales à la circonférence du cylindre; l'hypoténuse de chacun de ces nouveaux triangles rectangles supposés roulés autour du cylindre, marquera sur la surface de ce cylindre une spire, c'est-à-dire un tour du filet de la vis; l'hypoténuse *AD* marquera un tour *AGE* du filet; l'hypoténuse *EF* marquera un second tour *EHC* du même filet : & ainsi des autres.

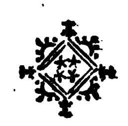
Si le cylindre de la vis est dans une situation verticale, les bases *ED*, *CF* des triangles rectangles *AED*, *ECF* dont les hypoténuses marquent les filets de la vis, seront horizontales, & les hypoténuses *AD*, *EF* pourront être regardées comme des plans inclinés dont *AE*, *EC* seront les hauteurs, & dont *ED*, *CF* seront les bases. Ainsi chaque tour du filet de la vis pourra être considéré comme un plan incliné dont la base seroit égale à la circonférence du cylindre dans lequel on a taillé la vis, & dont la hauteur seroit égale à celle du pas de la vis.

La vis entre ordinairement dans un trou recreusé intérieurement en forme de spirale semblable & égale au filet de la vis, pour recevoir ce filet. Le corps ainsi percé ou taillé intérieurement, & dans les filets duquel sont engagés les filets de la vis, s'appelle *Écrou*.

Lorsque la vis est verticale & fixe, & que l'on fait tourner l'écrou, les filets de l'écrou rampent sur ceux de la vis comme sur un plan incliné ; au contraire lorsque l'écrou est fixe & que la vis qu'il reçoit est verticale & tourne dans l'écrou, les filets de cette vis rampent sur ceux de l'écrou comme sur des plans inclinés. Ainsi soit qu'on soûtienne un écrou sur les filets d'une vis immobile, soit qu'on soûtienne la vis sur les filets de l'écrou immobile, on pourra toûjours regarder la pièce mobile comme un poids soûtenu sur un plan incliné dont la base est égale à la circonférence de la vis, & dont la hauteur est égale à celle du pas de la même vis.

Lorsque la vis mobile ou immobile n'est point verticale, on peut encore en regarder les filets comme des plans inclinés sur lesquels il faut soûtenir une des forces dans lesquelles on décompose la pesanteur de l'écrou.

On fait souvent engrener les filets d'une vis avec les dents d'une roue ; alors la vis se nomme *Vis sans fin*, parce qu'une ou deux spires de son filet engrenant continuellement entre les dents de la roue, il se présente toûjours de nouvelles dents aux mêmes spires, à mesure que celles qui ont été conduites s'échappent du filet de la vis.



CHAPITRE PREMIER.

De la Vis & de son Écrou.

499. On emploie la vis avec son écrou pour tirer, pousser & comprimer suivant la direction de son axe.

Comme le filet de la vis est par-tout également incliné sur la longueur du cylindre, & qu'elle avance par conséquent dans son écrou proportionnellement aux parties ou au nombre de tours qu'elle fait, on s'en sert aussi pour conduire des pièces de différentes machines, lorsqu'on veut connoître au juste le chemin que ces pièces parcourent.

Dans l'examen qu'on va faire de la vis & de son écrou, on supposera que les filets de l'un & de l'autre sont parfaitement polis, & que le frottement des filets de la vis contre ceux de l'écrou, se fait sans aucune résistance. Quoique cette hypothèse ne soit point vraie, & que dans presque toutes les vis l'inégalité des surfaces des filets, & leur résistance à couler les uns sur les autres, soient si considérables qu'on n'a pas besoin de puissance pour empêcher l'écrou de tourner & de descendre le long de la vis, elle ne sera pas inutile dans la recherche qu'on va faire des propriétés de la vis. Car la résistance que les filets de la vis & de l'écrou trouvent à glisser les uns sur les autres, pouvant être regardée comme une puissance qui s'oppose au mouvement de la vis ou de l'écrou, on pourra toûjours, en tenant compte de cette puissance, ramener aux propriétés de la vis

& de l'écrou ſuppoſés parfaitement polis, celles de la vis & de l'écrou dont les filets ne ſont pas aſſez polis pour permettre à l'une ou l'autre de ces deux pièces de tourner ſans trouver de réſiſtance de la part du frottement.

THÉOREME.

500. *Lorſqu'une puiſſance* P *ſoûtient un poids par le moyen d'une vis verticale & de ſon écrou; ſi cette puiſſance eſt dirigée dans un plan horizontal & perpendiculairement à la diſtance* PC *qu'il y a de ſon point d'application à l'axe de la vis, on va démontrer que* Fig. 156

La puiſſance P *appliquée à la vis ou à l'écrou,*

Eſt au poids qu'elle ſoûtient,

Comme la hauteur AB *du pas de la vis,*

Eſt à la circonférence du cercle qui a pour rayon la diſtance PC *de la direction de cette puiſſance à l'axe de la vis.*

DÉMONSTRATION.

Le poids que la puiſſance P doit ſoûtenir par le moyen de la vis & de ſon écrou, peut être appliqué à la vis ou à l'écrou; & il peut arriver que la vis ſoit fixe & l'écrou mobile, ou que la vis ſoit mobile & l'écrou fixe.

Si l'écrou eſt mobile & chargé du poids qu'il faut ſoûtenir, on imaginera que ce poids & celui de l'écrou ſont raſſemblés dans les filets de l'écrou ſoûtenus par ceux de la vis, & que l'écrou eſt retenu par la puiſſance P qui lui eſt appliquée. Or les filets de la vis pouvant être conſidérés comme des plans inclinés roulés autour d'un cylindre, la puiſſance P ſera dans le cas d'une force qui doit ſoûtenir ſur un

plan incliné le poids de toutes les parties du filet de l'écrou qu'on a supposé chargé de tout le poids que la puissance *P* doit soûtenir au moyen de la vis. Mais il se présente ici une difficulté qui pourroit arrêter dans le cours de la démonstration ; ainsi il faut la prévenir.

Un plan incliné considéré comme une lame infiniment mince, étant roulé sur un cylindre, son hypoténuse ne produit qu'un filet d'un relief infiniment petit ; il faut donc imaginer une infinité de plans inclinés appliqués & roulés les uns sur les autres, pour que leurs hypoténuses fassent un filet d'un relief fini. Tous ces plans inclinés ayant pour hauteur commune celle du pas de la vis, c'est-à-dire la distance qu'il y a parallèlement à l'axe entre deux spires voisines, en y comprenant un creux & un relief, sont de la même hauteur ; mais leurs bases faisant le tour entier du cylindre à différentes distances de son axe, ne sont pas de la même longueur. Ainsi les différens plans inclinés dont les hypoténuses appliquées & roulées les unes sur les autres forment le relief du filet de la vis, ne sont ni égaux ni semblables. Et comme on n'a point de raison pour considérer le poids des filets de l'écrou, sur un de ces plans plûtôt que sur un autre, on pourroit être arrêté dès le commencement de la démonstration, si l'on demandoit que tout le poids des filéts de l'écrou fût réuni dans un même point, & appuyé sur un seul point du filet de la vis.

Pour prévenir & éloigner cette difficulté, on considèrera en particulier le poids de chaque petite partie du filet de l'écrou ; & après avoir démontré que la petite puissance qu'il faudroit appliquer suivant la

direction de la puissance P, pour soûtenir ce petit poids, seroit à ce petit poids comme la hauteur invariable AB du pas de la vis, est à la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance PC de la direction de la puissance P à l'axe de la vis, on en déduira aisément que la somme de toutes ces petites puissances, ou la puissance P elle-même, est à la somme des poids de toutes les petites parties du filet de l'écrou, ou à la pesanteur de cet écrou lui-même chargé du poids qu'on doit soûtenir, comme la hauteur AB du pas de la vis, est à la circonférence du cercle qui a PC pour rayon.

Soit donc A, un point quelconque du filet de l'écrou, soûtenu sur un point correspondant du filet de la vis à une distance quelconque AC de son axe, par une puissance R appliquée immédiatement à ce point suivant une direction tangente à la circonférence d'un cercle qui auroit AC pour rayon : ce point A se trouvera sur un plan incliné dont la hauteur sera égale à celle AB du pas de la vis, & dont la base sera égale à la circonférence du cercle qui auroit AC pour rayon. Et comme la puissance R qui doit retenir ce point A est supposée tangente à la circonférence qui auroit AC pour rayon, c'est-à-dire parallèle à la base du plan incliné qui soûtient le même point A ; si l'on nomme A le petit poids dont est chargé le point A, & que l'on désigne par *circ.* AC la circonférence du cercle qui auroit AC pour rayon, l'on aura (n°. 460) $R : A :: AB :$ *circ.* AC.

Imaginons maintenant par le point A une droite inflexible CAP perpendiculaire à l'axe de la vis, & égale à la distance qu'il y a de la direction de la puissance P à cet axe ; puis considérant cette droite

comme un levier appuyé par son extrémité C sur l'axe de la vis, supposons qu'on applique à son autre extrémité P une petite puissance dirigée suivant une tangente au cercle qui auroit PC pour rayon, ou parallèlement à la direction de la puissance R, & que cette petite puissance, que nous nommerons p, retient par le moyen du levier le point A sur le filet de la vis; il est clair, par tout ce qui a été dit de la propriété des leviers, que la petite puissance p appliquée en P, sera à la puissance R appliquée immédiatement au point pesant A, comme AC est à PC, ou comme la circonférence du cercle qui aura AC pour rayon, est à celle du cercle qui aura PC pour rayon; c'est-à-dire qu'on aura $p : R :: circ. AC : circ. PC$.
Mais on vient de trouver $R : A :: AB : circ. AC$.

Donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura . . . . $p : A :: AB : circ. PC$; c'est-à-dire que

Chaque petite puissance qui retiendra sur le filet de la vis le poids d'une petite partie du filet de l'écrou, en agissant sur l'extrémité d'un levier égal à la distance qu'il y a de l'axe de la vis à la direction de la puissance P,

Sera au poids de cette petite partie du filet de l'écrou,

Comme la hauteur invariable AB *du pas de la vis,*

Est à la circonférence du cercle invariable qui auroit pour rayon la distance PC *de la direction de la puissance* P *à l'axe de la vis.*

Donc puisque les deux derniers termes de cette proportion sont constans, on trouvera que

La somme de toutes les petites puissances qui retiendront sur les filets de la vis, toutes les petites parties

pesantes du filet de l'écrou, ou la puissance P elle-même qui doit retenir le poids total de l'écrou,

Est à la somme de toutes ces petites parties pesantes; c'est-à-dire au poids entier de l'écrou,

Comme la hauteur AB du pas de la vis,

Est à la circonférence du cercle qui auroit pour rayon la distance PC de la direction de la puissance P à l'axe de la vis. C. Q. F. D.

Si l'écrou étoit immobile, & que la vis fût mobile & chargée du poids qui doit être retenu au moyen d'une puissance π appliquée à l'extrémité d'un barreau CD π passé au travers de la tête de la vis, on auroit à soûtenir les filets de la vis sur ceux de l'écrou comme sur des plans inclinés: & comme les filets de ces deux pièces ont précisément la même inclinaison, il est évident qu'il faudroit la même puissance pour soûtenir les filets de la vis sur ceux de l'écrou, que pour soûtenir les filets de l'écrou sur ceux de la vis. Ainsi la puissance qu'il faudra appliquer à l'extrémité π du barreau CD π passé au travers de la tête de la vis, sera à la pesanteur de la vis chargée de tout le poids qu'on doit soûtenir, comme la hauteur AB du pas de la vis, est à la circonférence du cercle qui auroit pour rayon la distance CD π de l'axe de la vis à la direction de la puissance π.

Si la vis tournoit sans se mouvoir parallèlement à son axe, elle obligeroit son écrou à avancer parallèlement à son axe; ce qui n'apporteroit aucun changement au rapport qu'on vient de trouver entre la puissance π & le poids de l'écrou qu'on doit soûtenir.

COROLLAIRE I.

501. Comme le diamètre du cylindre de la vis Fig. 156.

n'entre point dans le rapport de la puissance au poids; & que ce rapport est égal à celui qu'il y a entre la hauteur du pas de la vis & la circonférence qui a pour rayon la distance de l'axe de la vis à la direction de la puissance; il est évident que si l'on augmente ou si l'on diminue le diamètre de la vis sans rien changer à la hauteur de son pas, ni à la distance de l'axe à la direction de la puissance, il n'arrivera aucun changement dans le rapport de la puissance au poids. La même puissance comprimera donc également fort avec des vis de différens diamètres, pourvû qu'elle agisse à distances égales des axes de ces vis, & que ces vis aient des pas de même hauteur.

Il suit de là que, quelque proche ou quelque éloigné que puisse être de l'axe de la vis le point *A* où l'on peut supposer que la pesanteur de l'écrou ou sa charge est rassemblée, on trouvera toûjours la puissance au poids de l'écrou, comme la hauteur du pas de la vis, est à la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance de l'axe de la vis à la direction de la puissance : car le point *A* plus ou moins éloigné de l'axe de la vis, peut être considéré comme placé sur les filets de différentes vis dont les pas sont de même hauteur.

Corollaire II.

502. Puisque la puissance est au poids, comme la hauteur du pas de la vis, est à la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance de l'axe à la direction de la puissance; il est évident que la même puissance appliquée à la même distance de l'axe de la vis, comprimera avec d'autant plus de force, que le pas de la vis sera moins haut; & que la même

puissance comprimera également fort avec des vis dont les pas seront de différente hauteur, lorsque les distances des axes de ces vis aux directions de cette puissance, seront proportionnelles aux hauteurs des pas de ces vis.

COROLLAIRE III.

503. Si la vis est inclinée & fixe, & que son écrou chargé d'un poids quelconque soit mobile; enfin si la puissance *P* qui agit perpendiculairement à la distance *PC* qu'il y a de sa direction à l'axe de la vis, est dans un plan perpendiculaire à cet axe; on imaginera une verticale *AD* menée par un point *A* de l'axe, où tout le poids de l'écrou & de sa charge peut être supposé rassemblé; puis prenant une partie *AD* de cette verticale pour diagonale, on fera un parallélogramme rectangle *AEDQ* dont un côté *AQ* soit parallèle à l'axe de la vis, ou suivant cet axe, & l'autre côté *AE* soit perpendiculaire au même axe; enfin après avoir représenté par la diagonale *AD* de ce parallélogramme tout le poids de l'écrou & de sa charge, on prendra à la place de ce poids deux autres forces représentées par les côtés *AE*, *AQ* du même parallélogramme. Mais la force représentée par *AE* étant perpendiculaire à l'axe de la vis que l'on suppose fixe, trouvera un appui solide sur cet axe, & ne fera aucun effort pour mouvoir l'écrou le long des filets de la vis. Donc la puissance *P* n'aura à soûtenir au moyen de la vis que la force représentée par la droite *AQ* dirigée suivant l'axe de la vis. Fig. 157.

Si l'on nomme *A* le poids de l'écrou & de sa charge représenté par *AD*, & *Q* la force représentée

par AQ; on aura $Q : A :: AQ : AD$ ou :: $S.ADQ : S.T.$

La force Q agissant suivant l'axe de la vis ; & étant la seule chose que la puissance P ait à soûtenir au moyen de cette vis, cette force agira sur la vis inclinée comme un poids sur une vis verticale ; ainsi l'on aura (n°. 500) $P : Q :: AB : circ. PC$.

Donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $P : A :: AQ \times AB : AD \times circ. PC$ ou :: $S.ADQ \times AB : S.T. \times circ. PC$.

Mais l'angle ADQ est le complément de l'angle QAD que l'axe de la vis fait avec la verticale AD; ainsi cet angle ADQ est égal à celui que l'axe de la vis fait avec un plan horizontal, & est par conséquent l'angle d'inclinaison de la vis à l'horizon. Donc la proportion $P : A :: S.ADQ \times AB : S.T. \times circ. PC$ peut se traduire comme il suit.

La puissance P

Est au poids de l'écrou & de sa charge,

Comme le produit de la multiplication du sinus d'inclinaison de la vis à l'horizon, par la hauteur AB *du pas de la vis,*

Est au produit du sinus total, & de la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance PC *de l'axe de la vis à la direction de la puissance* P.

COROLLAIRE IV.

Fig. 158 & 159. 504. La vis étant inclinée & fixe comme dans le Corollaire précédent ; si la direction DP de la puissance P appliquée à l'écrou, n'est pas dans un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, on imaginera, suivant la direction de cette puissance & parallèlement

à l'axe de la vis, un plan *DGFH* qui rencontrera perpendiculairement le plan de l'écrou suivant une droite *EDH*, sur laquelle on mènera de l'axe de la vis une perpendiculaire *CE* dans le même plan de l'écrou. Puis imaginant que la puissance *P* est représentée par une partie *DF* de sa direction, l'on fera sur cette partie comme diagonale un parallèlogramme *DGFH* dont un côté *DH* sera dans la ligne *EDH*, & l'autre côté *DG* sera parallèle à l'axe de la vis. Par le moyen de ce parallélogramme, on décomposera la puissance *P* en deux autres forces représentées par *DH* & *DG*.

La force représentée par *DG* soûtiendra une partie de la force avec laquelle l'écrou tendra à descendre parallèlement à l'axe de la vis; ainsi il faudra la soustraire de cette force, si comme dans la figure 158 la puissance *P* tire au dessus du plan de l'écrou: mais si, comme dans la figure 159, la puissance *P* tire au dessous du plan de l'écrou, la force représentée par *DG* chargera l'écrou, & il faudra par conséquent l'ajoûter à l'effort qu'il fera pour descendre parallèlement à l'axe de la vis. Fig. 158. Fig. 159.

La force représentée par *DH* étant dirigée dans le plan de l'écrou, sera la force à laquelle se réduira la puissance *P* pour soûtenir l'écrou au moyen de la vis; & la droite *CE* qu'on a menée dans le même plan par l'axe de la vis & perpendiculairement à la direction de cette force, sera la distance du même axe à la même force représentée par *DH* laquelle force nous nommerons *H*.

La vis étant inclinée, & la pesanteur de l'écrou ou de sa charge supposée réunie à quelque point de l'axe de la vis, étant décomposée, comme dans le

Corollaire précédent, en deux forces dont l'une soit perpendiculaire & l'autre parallèle à l'axe de la vis; la première de ces forces sera soûtenue par cet axe qu'on suppose immobile, & la puissance *P* ne soûtiendra au moyen de la vis, que la seconde qu'on déterminera par cette proportion :

Comme le sinus total, ou S. T.
Est au sinus de l'inclinaison de la vis à l'horizon, ou à S. CIK;
Ainsi le poids de l'écrou qu'on nommera A,
Est à la force qui restera à ce poids A *parallèlement à l'axe de la vis, & qui sera représentée par* $\frac{A \times S.\,CIK}{S.\,T.}$.

La puissance P représentée par *D F* étant décomposée en deux forces représentées par *DG*, *D H* qu'on nommera *G*, *H*, on aura $P : G : H :: DF : DG : DH$ ou $:: DF : HF : DH$ ou $:: S.\,DHF : S.\,FDH : S.\,DFH$, c'est-à-dire comme le sinus total, le sinus de l'angle que la puissance *P* fera avec le plan de l'écrou, & le sinus du complément de cet angle. Ainsi l'on trouvera $H = \frac{P \times S.\,DFH}{S.\,T.}$ & $G = \frac{P \times S.\,FDH}{S.\,T.}$.

Retranchant la force G ou $\frac{P \times S.\,FDH}{S.\,T.}$ de l'effort $\frac{A \times S.\,CIK}{S.\,T.}$ que fait l'écrou pour descendre parallèlement à l'axe de la vis, dans le cas où la puissance *P* tire au dessus du plan de l'écrou, comme dans la figure 158; ou ajoûtant ces deux forces ensemble, dans le cas où la puissance *P* tire au dessous de

de l'écrou, le reste $\frac{A \times S.CIK - P \times S.FDH}{S.T.}$ ou la somme $\frac{A \times S.CIK + P \times S.FDH}{S.T.}$ représentera la force que l'écrou aura pour descendre parallèlement à l'axe de la vis; & pour réunir ensemble les deux cas, on exprimera cette force par $\frac{A \times S.CIK \mp P \times S.FDH}{S.T.}$,

Comme la force $\frac{A \times S.CIK \mp P \times S.FDH}{S.T.}$ que l'écrou a pour descendre parallèlement à l'axe de la vis, doit être soûtenue par la seule force H ou $\frac{P \times S.DFH}{S.T.}$, que AB est la hauteur du pas de la vis, & que *circ.* EC représente la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance de l'axe de la vis à la direction de la force H, on aura cette proportion (*n°.* 500)

$$\frac{P \times S.DFH}{S.T.} : \frac{A \times S.CIK \mp P \times S.FDH}{S.T.} :: AB : circ.\,EC,$$

ou $P \times S.DFH : A \times S.CIK \mp P \times S.FDH :: AB : circ.\,EC.$

Faisant le produit des extrêmes & celui des moyens de cette proportion, l'on aura cette égalité $P \times S.DFH \times circ.\,EC = A \times S.CIK \times AB \mp P \times S.FDH \times AB.$ Et ajoûtant à chaque membre $\pm P \times S.FDH \times AB$; l'on aura $P \times S.DFH \times circ.\,EC \pm P \times S.FDH \times AB$ ou $P \times (S.DFH \times circ.\,EC \pm S.FDH \times AB) = A \times S.CIK \times AB.$

Regardant les deux membres de cette égalité l'un comme le produit des extrêmes, l'autre comme le produit des moyens d'une proportion, l'on aura

$p : a :: S.cik \times ab : S.dfh \times circ.\ ec \pm S.fdh \times ab.$

C'est-à-dire que

La puissance P

Est au poids de l'écrou ou de sa charge ;

Comme le produit fait de la hauteur du pas de la vis & du sinus d'inclinaison de son axe à l'horizon,

Est au produit de la multiplication du sinus de complément de l'angle que la direction de la puissance P fait avec le plan de l'écrou, par la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance de la puissance à l'axe de la vis, plus ou moins un autre produit fait de la multiplication du sinus de l'angle que la direction de la même puissance fait avec le plan de l'écrou, par la hauteur du pas de la vis, suivant que la direction de la puissance P tire au dessus ou au dessous du plan de l'écrou.

Remarque.

505. On doit remarquer qne le dernier Corollaire renferme tous les cas que l'on peut proposer au sujet de la vis, pourvû néanmoins que la charge de l'écrou puisse être imaginée réunie dans un point d'une ligne verticale menée par l'axe de la vis.

Car la charge de l'écrou étant supposée verticale, & l'axe de la vis faisant un angle quelconque avec l'horizon, c'est la même chose que si l'on proposoit une charge de direction quelconque par rapport à l'axe de la vis ; & la puissance *P* ayant de plus une direction inclinée à volonté par rapport au plan de l'écrou perpendiculaire à l'axe de la vis, il est clair qu'on ne peut rien demander de plus général par rapport à la direction de la charge de l'écrou, & à celle de la puissance qui est en équilibre avec elle.

CHAPITRE II.

De la Vis sans fin.

506. UNE vis dont les filets engrènent entre les dents d'une roue dentée, se nomme *Vis sans fin*. Fig. 160.

Quoiqu'on puisse multiplier prodigieusement la force par le moyen de cette machine, on ne s'en sert guère que dans le cas où la pièce à mouvoir doit être conduite très-lentement, & lorsqu'on veut connoître au juste la quantité du chemin qu'on lui fait parcourir.

On pourroit encore faire usage de la vis sans fin pour élever des fardeaux très-pesans. Mais comme il faudroit que la vis & la roue fussent de métal, pour être assez solides relativement au prodigieux effort dont cette machine est capable, & que la machine deviendroit d'un trop grand prix; on aime mieux se servir des autres machines multipliées qui ont moins de frottement, qui sont moins coûteuses & plus faciles à exécuter.

Les filets de la vis sans fin & les dents de la roue entre lesquels ils engrènent, éprouvent des frottemens si difficiles à vaincre, que cette vis est capable d'arrêter une roue qu'un poids *K* assez considérable tend à faire tourner, sans qu'il soit besoin d'employer aucune puissance pour retenir la vis & l'empêcher de céder à l'effort de la roue. Les Horlogers qui connoissent cette propriété de la vis sans fin, s'en servent pour arrêter les arbres des barillets des montres & quelquefois des pendules; parce qu'au moyen de cette vis qui est capable de résister aux plus grands

efforts des ressorts, ils ont la facilité de bander ces ressorts à quel point ils veulent.

L'axe de la vis sans fin doit être dans le plan de la roue avec laquelle elle engrène.

THÉOREME.

Fig. 160. 507. *Lorsqu'une puissance* P *agit sur une vis sans fin par le moyen d'une manivelle* EM *au rayon de laquelle elle est appliquée perpendiculairement, & que la vis engrène dans les dents d'une roue garnie d'un tambour autour duquel s'enveloppe une corde* DH *qui soûtient un poids* K; *si la machine peut être considérée sans frottement, on a cette proportion:*

La puissance P *appliquée au rayon de la manivelle;*

Est au poids K *appliqué par le moyen de sa corde au rayon* CD *du tambour;*

Comme le produit de la multiplication de la hauteur AB *du pas de la vis par le rayon* CD *du tambour,*

Est au produit de la multiplication de la circonférence du cercle que décrit la manivelle ou la puissance P *qui lui est appliquée, par le rayon* CA *de la roue.*

C'est-à-dire que $P : K :: AB \times CD : \text{circ.} EM \times CA$.

DÉMONSTRATION.

La puissance *P* étant appliquée perpendiculairement au rayon *EM* de la manivelle, ce rayon sera la distance de l'axe de la vis à la direction de cette puissance. Or le point *A* de la dent de la roue étant poussé par le filet de la vis, comme le feroit le filet d'un écrou; si l'on nomme *A* l'effort que le filet de la vis fait sur ce point *A* parallèlement à son axe qu'on suppose dans le plan de la roue, on aura (*n°.* 500) $P : A :: AB : \text{circ.} EM$.

Mais l'effort qui se fait sur le point A à l'extrémité du rayon CA de la roue, étant en équilibre avec le poids K appliqué à l'extrémité du rayon CD du tambour, on aura (*n°*. 413) $A : K :: CD : AC$.

Donc si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, on aura $P : K :: AB \times CD : circ. EM \times AC$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

508. Si au lieu de mettre un tambour sur l'axe de la première roue, on y mettoit une seconde vis sans fin dont la hauteur du pas fût ab; si cette seconde vis engrenoit dans une seconde roue dentée dont le rayon fût ac, & que cette seconde roue eût à son axe un tambour dont le rayon fût cd; enfin si un poids K étoit soûtenu au moyen d'une corde enveloppée sur ce tambour; on auroit le rapport de la puissance P appliquée à la manivelle de la première vis, au poids K appliqué au rayon du tambour, par cette proportion : Fig. 161.

La puissance P *appliquée à la manivelle de la première vis,*

Est au piods K *appliqué au rayon du tambour;*

Comme le produit $AB \times ab \times cd$ *fait des hauteurs des deux pas de vis & du rayon du tambour,*

Est au produit circ. $EM \times$ circ. $AC \times ac$ *fait de la circonférence de la manivelle, de la circonférence de la première roue, & du rayon de la seconde roue.*

Car en nommant A l'effort que la première vis fait sur le point A de la dent de la première roue, on aura (*n°*. 507) $P : A :: AB : circ. EM$.

Regardant ensuite l'effort qui se fait sur le point A, comme une puissance appliquée à une distance AC

de l'axe de la seconde vis dont le filet pousse le point *a* d'une dent de la seconde roue, & nommant *a* l'effort que ce filet fait sur ce point *a*, on aura aussi (nº. 507) $A : a :: ab : circ. AC$.

Enfin l'effort *a* qui se fait sur la dent de la seconde roue, étant en équilibre avec le poids *K* appliqué au tambour ou cylindre concentrique à cette seconde roue, on aura (nº. 413) $a : K :: cd : ac$.

Multipliant ces trois proportions par ordre, on aura $P : K :: AB \times ab \times cd : circ. EM \times circ. AC \times ac$.

Remarque.

509. On a supposé dans le dernier Théorème & son Corollaire, que la droite menée du centre de chaque roue au point de la dent poussé par le filet de la vis, étoit perpendiculaire à l'axe de cette vis; ce qui n'est pas toûjours vrai, & ce qui ne peut arriver qu'une fois & pendant un instant seulement à chaque tour de la vis sans fin. Mais on peut terminer les dents des roues par des courbes, ou arrondir les filets des vis, de manière que les roues poussées par les filets des vis tournent toûjours avec des forces uniformes; en sorte que le poids *K* soit toûjours en équilibre avec la même puissance *P*, de quelque manière que les filets des vis soient disposés par rapport aux dents des roues.

Il faut encore remarquer que les rayons dont on a fait usage dans les proportions qu'on a démontrées, ne sont pas les vrais rayons des roues, mais seulement les rayons qu'auroient ces roues si on les diminuoit de toute la saillie de l'arrondissement des dents.

156

157

155

158

159

M

P

E

160

P

E

M

K

A

C

B

161.

d

K

ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE NEUVIEME.

Du Coin.

DÉFINITIONS.

510. LE *Coin* eſt un corps dur de la figure Fig.
d'un priſme triangulaire *AEBCDF* : on le repréſente ordinairement par ſon profil *AEB*, c'eſt-à-dire par la baſe génératrice du priſme dont il a la figure.

On ſe ſert du coin non ſeulement pour fendre des corps durs & les ſéparer en deux parties, en introduiſant ſon angle le plus aigu dans une fente déjà commencée, & en le faiſant entrer de force, ſoit par une ſimple preſſion, ſoit à coups de marteau ; mais encore pour élever des corps peſans, ou pour les comprimer.

Les deux faces parallélogrammiques *AEFD*, *BEFC* qui forment l'angle le plus aigu du coin, s'appellent les *côtés* du coin ; la droite *EF* où ces faces ſe rencontrent ſe nomme le *tranchant* ; & la face parallélogrammique *ABCD* oppoſée au tranchant, s'appelle la *tête* du coin. Et ſi l'on repréſente

le coin par son profil triangulaire *AEB*, le point *E* se nomme le tranchant, la droite *AB* s'appelle la tête, & les deux lignes *AE*, *BE* se nomment les côtés du coin. Enfin lorsque le profil *AEB* du coin est un triangle isoscèle, la perpendiculaire *EG* tirée du tranchant sur la tête, s'appelle la *hauteur* du coin, & la tête *AB* se nomme la *base*.

Quoiqu'il n'y ait point d'instrument plus simple que le coin, il n'y a cependant point de machine sur laquelle les sentimens des Méchaniciens aient été plus partagés. Les uns ont dit qu'à l'instant de l'équilibre entre la force dont on presse ou frappe perpendiculairement la tête du coin isoscèle, & la résistance du corps à fendre, cette force & cette résistance étoient proportionnelles à la demi-base du coin & à sa hauteur : d'autres ont prétendu que ces deux forces étoient proportionnelles à la demi-base du coin & à la longueur de l'un de ses côtés. Lorsque le tranchant du coin ne va pas jusqu'au fond de la fente, il y en a qui assurent qu'à l'instant de l'équilibre entre la force imprimée perpendiculairement à la tête du coin, & la résistance du corps à fendre, cette force & cette résistance sont entr'elles comme la largeur de la fente & sa profondeur. Plusieurs ont donné entre les mêmes forces des rapports plus composés dans lesquels quelques-uns ont fait entrer les dimensions du coin, & quelques autres n'y ont point fait entrer ces dimensions. Sans s'arrêter à discuter tous ces sentimens différens, on va exposer ce que l'on pense sur le coin ; & l'on fera remarquer à mesure qu'on en trouvera l'occasion, en quoi quelques-uns des sentimens dont on vient de parler, sont vrais relativement à ce que leurs auteurs ont entendu par *résistance du corps à fendre*.

THÉOREME.

511. *Soit un coin* AEB *de figure quelconque, de matière dure & incompressible, dans une fente* HNI *dont il touche les côtés aux points* H, I. *Si l'on pousse ou frappe le coin suivant une direction* GM *perpendiculaire à sa tête* AB, *& que la force qui lui est imprimée soit en équilibre avec la résistance des côtés de la fente; il y aura toûjours dans la direction* GM *de la force imprimée, un point* F *duquel on pourra mener deux perpendiculaires* FK, FL *aux côtés* AE, BE *de ce coin, par des points* H, I *où il touchera les côtés de la fente.* Fig. 163 & 164.

DÉMONSTRATION.

Le coin poussé ou frappé suivant la direction *GM*, n'ayant point d'appui dans cette direction, & ne trouvant de résistance qu'aux deux points *H*, *I* où il rencontre les côtés de la fente, sa force se décomposera nécessairement en deux autres qui seront dirigées vers les appuis *H*, *I*. Et comme on suppose ce coin très-dur, incompressible ou incapable de changer de figure pendant la pression qu'il souffre entre les côtés de la fente, il pressera les appuis *H*, *I* perpendiculairement à ses propres faces *AE*, *BE*; en sorte que les directions des deux forces dans lesquelles se décomposera la force imprimée à ce coin, passeront par ses points d'appui *H*, *I*, & seront perpendiculaires à ses côtés *AE*, *BE*.

Mais la force imprimée au coin suivant la direction *GM* ne peut être rassemblée que dans quelque point de cette direction, & les directions des deux forces dans lesquelles elle se décompose, passent nécessairement par ce même point. Donc il y aura toûjours

dans la direction GM de la force imprimée au coin; un point F duquel on pourra mener deux perpendiculaires FK, FL aux côtés AE, BE de ce coin, par des points H, I où ces côtés toucheront ceux de la fente. C. Q. F. D.

Corollaire.

Fig. 164. 512. On a supposé que le coin étoit très-dur & conservoit sa figure malgré la pression des côtés de sa fente. Mais si au contraire les côtés de la fente étoient très-durs, & la matière du coin assez compressible pour que sa figure s'accommodât à ces côtés; & si les mêmes côtés de la fente étoient des plans représentés par des lignes droites HN, IN; il est évident que les droites FK, FL perpendiculaires aux côtés du coin, seroient aussi perpendiculaires aux côtés HN, IN de la fente. Ainsi il faudroit qu'il y eût dans la direction GM de la force imprimée au coin, un point F duquel on pût mener deux perpendiculaires au côtés de la fente, par des points H, I où ces côtés feroient touchés par ceux du coin.

Remarque.

Fig. 165. 513. On a supposé le coin poussé ou frappé suivant une direction GM perpendiculaire à sa tête AB; parce que s'il étoit poussé ou frappé suivant une direction GD oblique à sa tête, il faudroit décomposer sa force représentée par une partie GD de sa direction, en deux autres forces représentées par les côtés GM, GC d'un parallélogramme $GMDC$ qui auroit GD pour diagonale, & dont les côtés GM, GC feroient l'un perpendiculaire, & l'autre parallèle à la tête AB du coin. Et comme la force représentée

par le côté *GC* parallèle à la tête du coin, ne feroit aucun effort pour faire enfoncer ce coin, il ne faudroit considérer que la force représentée par le côté *GM* perpendiculaire à la tête *AB* du coin. Ainsi en supposant le coin poussé ou frappé suivant une direction *GM* perpendiculaire à sa tête *AB*, on n'a eu en vûe que la force capable de faire enfoncer le coin dans l'ouverture du corps à fendre.

THÉOREME.

514. *Soit un coin* AEB *en forme de prisme triangulaire dur & incompressible, placé dans une fente dont il touche les côtés en deux points* H, I. *Si l'on pousse ou frappe ce coin perpendiculairement à sa tête, la force qu'on lui imprimera, sera aux deux forces qui en résulteront aux deux points* H, I *contre lesquels ses côtés* AE, BE *seront appuyés, comme la base ou tête* AB *de ce coin, sera à ses deux côtés* AE, BE, *c'est-à-dire que si l'on nomme* G *la force imprimée au coin perpendiculairement à sa tête, & qu'on appelle* H, I *les forces qui en résulteront aux points comprimés* H, I *de la fente, on aura* G : H : I :: AB : AE : BE. Fig. 163.

DÉMONSTRATION.

Le coin poussé ou frappé suivant une direction *GM* perpendiculaire à sa tête *AB* étant appuyé par les deux points *H*, *I* où il est touché par les côtés de la fente, on a vû (n°. 511) qu'il y aura dans la direction *GM* de sa force, un point *F* duquel on pourra mener par les points *H*, *I* des perpendiculaires *FK*, *FL* aux côtés de ce coin; & que la force imprimée à sa tête pouvant être considérée comme réunie à ce point *F*, se décomposera en deux forces

dirigées suivant les perpendiculaires *FK*, *FL* à ses côtés.

Donc ayant fait un parallélogramme *FKML* dont la diagonale *FM* soit une partie de la direction de la force imprimée au coin, & dont les côtés soient pris sur les droites *FK*, *FL* menées perpendiculairement aux côtés du coin par leurs appuis *H*, *I*; si la force imprimée au coin est représentée par la diagonale *GM*, elle se décomposera en deux autres forces qui seront représentées par les côtés *FK*, *FL*, & qui seront les charges des points d'appui *H*, *I*. Ainsi en nommant G la force dirigée suivant *FM*, & appelant *H*, *I* les charges des deux appuis de même nom, on aura $G : H : I :: FM : FK : FL$ ou $:: FM : FK : MK$.

Mais les deux triangles *FKM*, *AEB* ayant les côtés perpendiculaires chacun à chacun, seront semblables & donneront $FM : FK : MK :: AB : AE : BE$.

Donc on aura aussi $G : H : I :: AB : AE : BE$. C. Q. F. D.

Corollaire I.

Fig. 163. 515. Puisque la force imprimée au coin perpendiculairement à sa tête, & les deux efforts qui en résultent perpendiculairement à ses faces sur les appuis *H*, *I* qu'il trouve dans les côtés de la fente, sont proportionnels à la largeur de la tête, & aux longueurs des côtés du coin; si les côtés du coin sont égaux, leurs charges ou pressions seront égales, & la force imprimée à la tête du coin sera à la somme des pressions de ses deux côtés, comme la demi-base du coin sera à l'un de ses côtés.

Il suit de là que si l'on prend pour la résistance

du corps à fendre la somme des résistances que le coin trouve perpendiculairement à ses faces, sur les points H, I de la fente où il s'appuie, le sentiment de ceux qui disent que *la force imprimée au coin, est à la résistance du corps à fendre, comme la demi-base du coin est à l'un de ses côtés*, sera vrai.

Corollaire II.

516. Si le coin remplit la fente & est exactement contenu dans la fente, en sorte que les côtés de la fente soient égaux à ceux du coin; la force imprimée à ce coin sera aux résistances que les côtés de la fente feront à ceux du coin, comme la largeur de l'ouverture de la fente est à ses côtés: en sorte que si le coin est isoscèle, la force imprimée au coin sera à la résistance que trouvera chacune de ses faces, comme la largeur de l'ouverture de la fente sera à ses côtés, ainsi que le prétendent quelques Méchaniciens.

Remarque.

517. Jusqu'ici l'on n'a regardé le coin que comme une machine simple propre à la compression; & il étoit juste de le considérer sous ce point de vûe, parce qu'on s'en sert utilement dans les arts méchaniques pour comprimer & serrer des pièces les unes contre les autres, & les contenir dans un état fixe. On en va rapporter quelques exemples.

Lorsqu'un Menuisier assemble les morceaux d'un ouvrage qu'il a colés ensemble, & que l'assemblage des pièces demande des précautions, par exemple Fig. 166. s'il assemble un ouvrage O dont les joints sont à onglet, & dont tous les angles doivent être droits;

il attache sur un établi, ou sur une forte planche dressée, deux règles *A*, *B* disposées à angle droit ; & ayant appuyé les côtés *PS*, *PQ* de son ouvrage contre ces deux règles, il place deux autres règles *C*, *D* contre les deux autres côtés *QR*, *RS* : ensuite il attache sur l'établi ou sur la planche deux tasseaux *G*, *I*; puis entre ces tasseaux & les deux règles *C*, *D*, il fait entrer des coins qui compriment les unes contre les autres les pièces de l'ouvrage *O* qu'il a assemblées, & qui les retiennent constamment dans un même état, jusqu'à ce que la colle soit sèche & que l'assemblage soit devenu solide. Quelquefois il enfonce deux coins *E*, *F* contrepointés entre un tasseau *G*, & une règle *C* qu'il a placé contre l'ouvrage ; mais le plus souvent il ne met qu'un coin entre le tasseau *I* & la régle *D* qu'il a placée le long d'un côté *RS* de l'ouvrage.

Plusieurs autres ouvriers font un usage assez semblable du coin pour contenir leur ouvrage pendant qu'ils travaillent. Ils font une entaille *CDI* dans une pièce de bois *AB*, & ayant placé dans cette entaille les pièces *F*, *G* qu'ils doivent travailler, ils les compriment par le moyen d'un coin *E* qu'ils font entrer avec force entre leur ouvrage & un côté *DI* de l'entaille. L'ouvrage étant uni par le coin avec une pièce de bois assez pesante, se trouve solidement établi.

Fig. 167.

On se sert encore du coin dans quelques moulins à huiles, pour exprimer les huiles des graines après les avoir pilées & échauffées dans des mortiers. On rassemble la graine pilée dans une serpillière, & l'on place le paquet entre deux jumelles que l'on force à se rapprocher par le moyen d'un ou de plusieurs coins.

Après avoir parlé du coin en le considérant comme une machine qui sert à comprimer ses appuis, il faut

dire quelque chose de la manière dont il agit, ou de ce qui arrive quand on l'emploie pour fendre du bois.

THÉOREME.

518. *Soit comme dans les Théorèmes précédens un coin* AEB *en forme de prisme triangulaire d'une matière dure & incompressible, placé dans la fente d'un corps déjà séparé en deux parties* HNQO, INQR *qui se touchent en* Q, *& qui soient réunies par un lien* OR. *Si pour rompre le lien* OR *& séparer de nouveau les deux parties du corps, l'on pousse ou frappe le coin* AEB *perpendiculairement à sa tête suivant une direction* GMP *qui rencontre en quelque point* P *la base* QV, *de l'une des deux parties du corps; & qu'après avoir décomposé la force imprimée au coin & représentée par une partie* FM *de sa direction, en deux autres forces exprimées par deux droites* FK, FL *menées perpendiculairement aux côtés du coin par ses appuis* H, I, *l'on mène par le point* Q *où se touchent les deux parties du corps, une perpendiculaire* QT *au lien* OR, *& une autre perpendiculaire* QS *à la direction* FK *de la force qui pousse la partie de corps* HNQO *dont la base* QX *n'est pas rencontrée par la direction* GMP *de la force imprimée au coin; on aura, en nommant* G *la force imprimée au coin, &* R *la résistance du lien* OR, Fig. 168.
G : R :: AB × QT : AE × QS.

DÉMONSTRATION.

La force *G* imprimée au coin, & représentée par une partie *FM* de la droite *GP* menée perpendiculairement à la base *AB* du coin, étant décomposée en deux autres forces nommées *K*, *L* & représentées par les côtés contigus *FK*, *FL* du parallélogramme

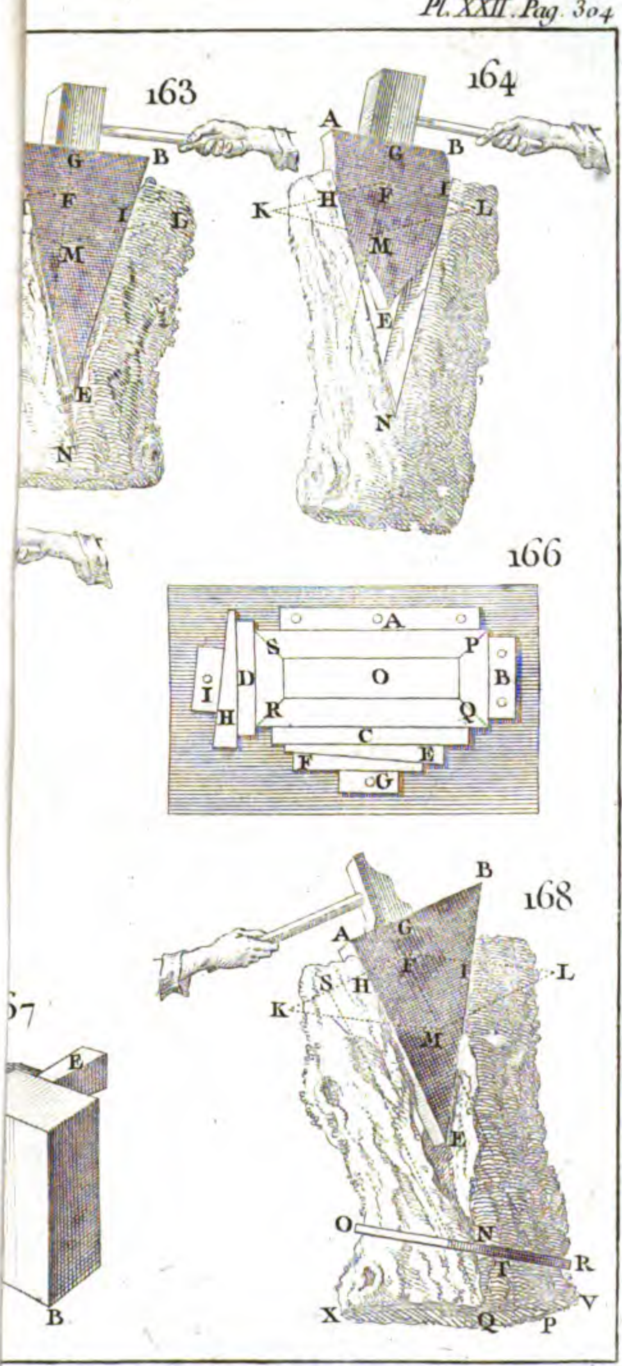
$FKML$ perpendiculaires aux côtés AE, BE du coin ; l'on aura $G : K : L :: FM : FK : FL$. ou (n°. 514) :: $AB : AE : BE$.

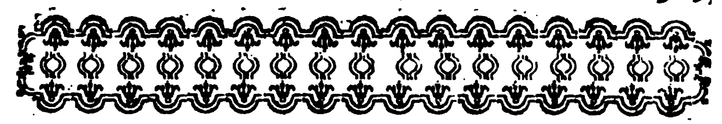
La même force nommée G & représentée par FM, rencontrant en P la base QV de la partie $INQR$ du corps ; les deux forces représentées par FK, FL dans lesquelles elle se décompose, seront en équilibre sur le point P qu'on peut regarder comme un appui solide ; ainsi l'on n'aura point à craindre que le corps soit renversé par la force imprimée au coin suivant la direction GP. Et comme l'appui P du corps en équilibre est dans la base QV de sa partie $INQR$, on pourra regarder cette partie comme inébranlable, & ne considérer que celle $HNQO$ qu'il en faudra détacher par le moyen du coin.

La partie $HNQO$ étant appuiée par le point Q contre l'autre partie $INQR$ que l'on considère comme inébranlable, & étant réunie à cette partie par le lien OR, peut être regardée comme un levier dont l'appui est en Q, & qui est tiré par deux puissances, savoir par une puissance K suivant la direction FK, & par la résistance R du lien suivant la direction OR. Or ces deux puissances K, R étant en équilibre, seront en raison réciproque des perpendiculaires QS, QT tirées de l'appui Q sur leurs directions ; ainsi l'on aura . . . $K : R :: QT : QS$. Et comme on a déjà . . . $G : K :: AB : AE$; si l'on multiplie ces deux proportions par ordre, on aura $G : R :: AB \times QT : AE \times QS$. C. Q. F. D.



LIVRE X.


163
G
B
F
I
L
M
E
N
164
A
G
B
H
F
I
K
L
M
E
N
166
A
S
P
O
D
B
I
H
R
Q
C
E
F
G
B
168
A
G
F
I
L
S
H
K
M
E
O
N
R
T
V
X
Q
P
67
E
B



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE DIXIEME.

De la meilleure figure qu'on peut donner aux dents des roues d'une machine.

519. Une machine qui ne va pas uniformément, & dont les parties font les unes sur les autres des efforts variables, quand on lui applique une force constamment égale, a besoin pour aller & pour vaincre une résistance donnée, qu'on lui applique une puissance dont la force absolue puisse diminuer ou augmenter suivant les situations plus ou moins favorables de ses pièces; & si l'on veut que la puissance appliquée à cette machine soit constante, cette puissance doit être capable de la mouvoir dans la situation la plus désavantageuse de ses parties. Ainsi la force qui suffiroit pour mouvoir une machine dans une situation moyenne entre la plus favorable & la moins favorable de ses parties, ne seroit pas suffisante pour la faire marcher dans toutes les situations possibles. Une autre machine au contraire dont les parties seront continuellement les unes à

l'égard des autres dans des ſituations également avantageuſes, marchera toûjours en lui appliquant une force motrice moyenne qui ne pourroit point faire marcher la première dans toutes les ſituations que ſes pièces peuvent avoir.

On doit donc regarder comme la meilleure figure qu'on peut donner aux dents des roues d'une machine, celle qui fera que les dents ſeront toûjours les unes à l'égard des autres dans des ſituations également favorables, & qui donnera par conſéquent à la machine la propriété d'être mûe uniformément par une puiſſance conſtamment égale.

Si toutes les roues pouvoient avoir des dents infiniment petites, leur engrénage, qu'on pourroit regarder comme un ſimple attouchement, auroit la propriété qu'on demande; puiſqu'on a vû (*n°.* 433) que la roue & le cylindre qu'on nommera dans la ſuite *Pignon*, ont tous deux la même force tangentielle, c'eſt-à-dire la même force pour tourner lorſque le mouvement ſe communique de l'un à l'autre par le ſeul attouchement ou par un engrénage infiniment petit des parties de leurs circonférences. Les dents finies & ſenſibles qu'on fera aux roues & aux pignons, ſeront donc telles qu'on les peut demander, lorſque la roue conduira le pignon, ou que le pignon conduira la roue comme ſi le pignon & la roue ſe touchoient ſimplement.

Définitions.

Fig. 169. 520. Lorſque deux roues dentées engrènent l'une dans l'autre, la plus grande ſe nomme *Roue*; & la plus petite s'appelle *Pignon.* Dans les moulins à eau, les roues dentées s'appellent *Rouets*, parce qu'elles

ſont plus petites que la roue à l'eau qu'on nomme ſimplement *Roue.*

Dans les petites machines on fait ordinairement les petites roues d'une ſeule pièce qu'on fend en pluſieurs parties égales pour y faire des dents ; alors ces petites roues ſe nomment *Pignons.*

Dans les grandes machines, au lieu de pignons d'une ſeule pièce, on aſſemble parallèlement entr'eux & à diſtances égales pluſieurs cylindres *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *&c.* dans des plateaux ronds *F*, *G*. Cet aſſemblage ſe nomme *Lanterne*, & les plateaux ronds *F*, *G* s'appellent *Tourtes* ou *Tourteaux.* Fig. 170.

Comme les pignons & les lanternes ne différent que par leur figure, & qu'on peut les employer indifféremment pour le même uſage ; lorſqu'on parlera en général de l'engrénage de deux roues, on comprendra les lanternes ſous le nom général de *Pignon.*

Les dents des roues & des pignons s'appellent en général *Dents.* Dans les petites machines où les dents ſont toutes d'une même pièce avec le corps de la roue, on les nomme proprement *Dents.* Dans les grandes machines où les dents ſont chacune d'une pièce particulière, on les nomme *Aluchons.* Les dents des pignons ſe nomment *Aîles*, quand elles ſont d'une même pièce avec le corps du pignon ; on les nomme *Fuſeaux*, quand elles ſont des cylindres aſſemblés dans des tourteaux, & qu'elles compoſent une lanterne.

Comme les fuſeaux des lanternes font l'office de dents, & que les aluchons des roues & les aîles des pignons ſont de véritables dents ; lorſqu'on parlera de l'engrénage en général, on comprendra ſous le nom

de *Dents*, les dents proprement dites, les aluchons, les aîles des pignons & les fuseaux des lanternes : & l'on ne fera usage des noms d'*Aîles* & de *Fuseaux*, que quand il s'agira des pignons proprement dits, ou des lanternes en particulier.

Fig. 169 & 171. La droite *BF* tirée par les centres *B*, *F* d'un pignon & d'une roue qui engrènent ensemble, s'appelle *Ligne des Centres*.

Lorsqu'on divise la ligne *BF* des centres en deux parties *AB*, *AF* proportionnelles aux nombres des dents du pignon & de la roue, ces deux parties *AB*, *AF* se nomment *Rayons proportionnels* ou *Rayons primitifs* du pignon & de la roue : & si des centres *B*, *F* on décrit avec les rayons primitifs, des cercles *X*, *R*, ces cercles représenteront un cylindre & une roue qui se toucheront au point *A* où l'on a divisé la ligne des centres, & seront le pignon & la roue qu'il faudroit prendre, s'ils devoient avoir des dents infiniment petites, ou s'ils devoient se conduire par le seul attouchement. Ces cercles *X*, *R* dont les rayons *AB*, *AF* sont proportionnels au nombre des dents du pignon & de la roue, seront nommés *Pignon & Roue primitifs*.

Fig. 169. Les droites *LI*, *FQ* tirées des centres du pignon & de la roue aux extrémités de leurs dents, se nomment *Rayons vrais du Pignon & de la Roue*.

Nous verrons dans la suite de ce Livre, que dans les pignons qui ont peu d'aîles ou de fuseaux, comme 5, 6, 7, 8 & même 9, le rayon vrai doit toûjours être plus grand que le rayon primitif ; & que dans les pignons qui ont un plus grand nombre de dents, le rayon vrai & le rayon primitif peuvent être de la même grandeur. Nous verrons aussi que

le rayon vrai de la roue doit être plus grand que son rayon primitif; parce que les rayons primitifs sont les rayons qu'auroient le pignon & la roue s'ils se touchoient simplement, & que l'engrénage de la roue dans le pignon dût se faire par l'alongement des rayons primitifs de ces deux pièces, ou par l'alongement de l'une des deux.

THÉOREME.

521. *Soit* BF *la ligne des centres d'un pignon & d'une roue qui engrénent ensemble. Ayant divisé cette ligne en deux parties* AB, AF *proportionnelles aux nombres des dents du pignon & de la roue, soient décrits avec les rayons* AB, AF *le pignon & la roue primitifs; si par le point* E *où la dent de la roue rencontre celle du pignon, l'on mène une perpendiculaire* HI *à la tangente commune de ces deux dents, ou à la courbure de l'une d'elles, & que cette perpendiculaire rencontre la ligne des centres en quel point* K *l'on voudra, on aura cette proportion:* Fig. 172, 173, 174, 175, 176 & 177.

La force avec laquelle la circonférence R *de la roue primitive tournera, & méneroit la circonférence* X *du pignon primitif, si elle le conduisoit par le point d'attouchement* A,

Est à la force avec laquelle tournera la circonférence du pignon primitif, lorsque la dent de la roue le poussera par le point E;

Comme le produit AB × KF,

Est au produit KB × AF.

DÉMONSTRATION.

Représentons par la lettre *R* la force de la circonférence de la roue primitive, & désignons par *P* la

force qu'aura la circonférence X du pignon primitif; lorsque la dent de la roue le mènera par le point E; il faut démontrer que l'on aura cette proportion $R : P :: AB \times KF : KB \times AF$.

Puisque la dent de la roue & celle du pignon se touchent au point E, la force de la roue se communiquera au pignon par le point E suivant la perpendiculaire IEH à la tangente commune des deux dents. Or si des centres F, B de la roue & du pignon, l'on mène les perpendiculaires FI, BH à la droite HI, & que l'on nomme I la force avec laquelle le point I de la roue tournera; comme HI sera la tangente du cercle que peut décrire le point I du plan de la roue, ce sera la force I de ce point qui se communiquera au pignon par le point E suivant la direction IEH. Mais IEH étant perpendiculaire à la droite BH tirée du centre B du pignon, sera aussi la tangente d'un cercle qui auroit BH pour rayon; & la force I se communiquant à ce cercle par sa tangente IH, sera la force avec laquelle le point H tournera.

La lettre R ayant été prise pour représenter la force avec laquelle la circonférence de la roue primitive ou le point A tournera, & la lettre I désignant la force du point I du plan de cette roue, on aura (n°. 420) $R : I :: IF : AF$.

La lettre I représentant aussi la force avec laquelle le point H du pignon tournera, & P ayant été choisi pour désigner la force avec laquelle tournera la circonférence X ou le point A du pignon primitif, en conséquence de la force I avec laquelle tourne le point H du même pignon, l'on aura (n°. 420) $I : P :: AB : HB$.

Multipliant ces deux dernières proportions par ordre, on aura $R : P :: AB \times IF : AF \times HB$.

Mais les triangles rectangles KFI, KBH sont semblables & donnent $IF : HB :: KF : KB$,

& . . . . $AB : AF :: AB : AF$.

Ainsi multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $AB \times IF : AF \times HB :: AB \times KF : KB \times AF$.

Donc puisque $R : P :: AB \times IF : AF \times HB$. on aura aussi $R : P :: AB \times KF : KB \times AF$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

522. On a supposé dans ce Théorème que la roue menoit le pignon ; mais il est évident que ce sera la même chose, lorsque le pignon mènera la roue. Donc si P est la force avec laquelle la circonférence du pignon primitif fait effort pour tourner, il en résultera à la circonférence de la roue primitive pour tourner, une force R telle que l'on aura $P : R :: KB \times AF : AB \times KF$. Fig. 171, 173, 174, 175, 176, 177.

COROLLAIRE II.

523. Si le point K où la droite HEI rencontre la ligne des centres, est entre le centre de la roue & le point A où se touchent la roue primitive & le pignon primitif, on aura $KB > AB$ & $AF > KF$; & par conséquent $KB \times AF > AB \times KF$. Mais on a trouvé $R : P :: AB \times KF : KB \times AF$; on aura donc $P > R$; c'est-à-dire que la circonférence du pignon primitif tournera avec plus de force que la circonférence de la roue primitive, soit Fig. 173, & 176.

que la roue conduise le pignon, soit que le pignon conduise la roue.

Corollaire III.

Fig. 172 & 175. 524. Si le point K où la droite HEI coupe la ligne des centres, est entre le centre B du pignon & le point A où se touchent les cercles primitifs du pignon & de la roue ; l'on aura $AB > KB$ & $KF > AF$, & par conséquent $AB \times KF > KB \times AF$; & comme on a trouvé $R : P :: AB \times KF : KB \times AF$, on aura $R > P$; c'est-à-dire que la circonférence de la roue primitive tournera avec plus de force que la circonférence du pignon primitif.

Corollaire IV.

Fig. 174 & 177. 525. Lorsque le point K où la droite HEI coupe la ligne des centres, se confondra avec le point A qui sépare les deux rayons primitifs de la roue & du pignon ; l'on aura $AB = KB$ & $KF = AF$, & par conséquent $AB \times KF = KB \times AF$, puisque chacun de ces produits deviendra $AB \times AF$: & comme on a $R : P :: AB \times KF : KB \times AF$, on aura $R = P$; c'est-à-dire que la circonférence de la roue primitive & celle du pignon primitif tourneront avec la même force, soit que la roue conduise le pignon, soit que le pignon conduise la roue.

Corollaire V.

Fig. 174 & 177. 526. On a dit au commencement de ce Livre, qu'on regardoit comme les meilleures figures qu'on peut donner aux dents des roues & des pignons, celles qui font que la roue & le pignon ont à leurs

circonférences la même force pour tourner; parce que dans ce cas la roue & le pignon se conduisent comme s'ils se touchoient simplement. Or on vient de voir dans le dernier Corollaire que la roue & le pignon auront à leurs circonférences primitives la même force pour tourner, lorsque la droite *HEI*, menée par le point d'attouchement *E* de deux dents perpendiculairement à leur courbure, passera par le point *A* qui sépare les deux rayons primitifs de la roue & du pignon. On doit donc regarder comme les meilleures figures qu'on peut donner aux dents des roues & des pignons, celles qui se poussent dans l'engrènement, de manière que la ligne perpendiculaire aux parties qui se touchent, passe toûjours par le même point *A* où se terminent les rayons primitifs de la roue & du pignon dans la ligne des centres.

COROLLAIRE VI.

527. Donc le point *K* où la ligne des centres sera coupée par la droite *HEI*, sera au dedans de la roue lorsque la circonférence du pignon primitif tournera avec plus de force que celle de la roue primitive; puisqu'on a vû (*n*°. 524) que si le point *K* étoit au dedans du pignon, la circonférence de la roue tourneroit avec plus de force que celle du pignon; & (*n*°. 525) que si le point *K* étoit au point *A*, les circonférences primitives de la roue & du pignon tourneroient avec une force égale. Fig. 173 & 174.

On démontrera de la même manière que le point *K* sera au dedans du pignon, lorsque la circonférence du pignon primitif tournera avec moins de force que celle de la roue primitive. Fig. 172 & 175.

Fig. 174 & 177. Enfin l'on prouvera de même que le point *K* se confondra avec le point *A*, lorsque les deux circonférences primitives de la roue & du pignon tourneront avec des forces égales.

Remarque.

Fig. 173 & 176. 528. Comme la force que la circonférence du pignon primitif a pour tourner, est plus grande que celle avec laquelle tourne la circonférence de la roue primitive, lorsque le point *K*, où la droite *HEI* coupe la ligne des centres, est au dedans de la roue primitive ; on dira peut-être que dans le cas où la roue conduit le pignon, il y a de l'avantage à donner à leurs dents des figures telles que dans leur attouchement la perpendiculaire *HEI* rencontre la ligne des centres au dedans de la roue. On dira peut-être aussi que, dans le cas où le pignon mènera la roue, il y aura de l'avantage à donner aux dents des courbures telles que la droite *HEI* menée par leur point d'attouchement *E* perpendiculairement à leurs courbures, coupe la ligne des centres en un point *K* situé au dedans du pignon primitif ; parce qu'alors la circonférence de la roue primitive tournera avec plus de force que celle du pignon.

Fig. 172 & 175.

Cette objection seroit bonne, si dans toutes les positions des dents de la roue & du pignon l'on pouvoit faire en sorte que la droite *HEI* perpendiculaire aux parties des dents qui se touchent, rencontrât toûjours la ligne des centres au dedans de la roue primitive, lorsque la roue mène le pignon, & coupât toûjours la ligne des centres au dedans du pignon primitif, lorsque le pignon mène la roue : mais cela est impossible, & il est aisé de faire voir

que si, dans quelques positions des dents de la roue & du pignon, la ligne *HEI* perpendiculaire à l'attouchement de ces dents coupe la ligne des centres au dedans de la roue, il y aura nécessairement d'autres situations de dents où la perpendiculaire *HEI* coupera la ligne des centres au dedans du pignon ; & réciproquement, s'il y a des positions de dents où la perpendiculaire *HEI* coupe la ligne des centres au dedans du pignon, il y en aura d'autres où cette perpendiculaire rencontrera la ligne des centres au dedans de la roue. Donc si l'on gagne quelque chose à faire en sorte que la perpendiculaire *HEI* coupe la ligne des centres au dedans de la roue primitive ou au dedans du pignon primitif, on perdra ensuite quelque chose lorsque la perpendiculaire *HEI* coupera la ligne des centres au dedans du pignon primitif, ou de la roue primitive ; en sorte qu'il faudra moins de force constante pour faire mener le pignon par la roue ou la roue par le pignon, lorsque la perpendiculaire *HEI* coupera toûjours la ligne des centres au terme commun *A* des rayons primitifs de la roue & du pignon, que quand cette perpendiculaire ne passera pas constamment par ce point *A*. On verra (*n*°. 534) la démonstration de cette vérité.

THÉOREME.

529. *La ligne* BF *des centres étant divisée en deux parties* AF, AB *proportionnelles aux nombres des dents de la roue & du pignon, comme dans le Théorême précédent, de manière que* AF, AB *soient les rayons primitifs de la roue & du pignon ; & ayant mené par le point* E *d'attouchement des dents perpendiculairement à leur tangente commune, une droite* HEI *qui rencontre* Fig. 172, 173, 174, 175, 176 & 177.

la ligne des centres en un point quelconque K, *on aura cette proportion :*

La vitesse avec laquelle la circonférence R *de la roue primitive tournera, & méneroit la circonférence* X *du pignon primitif, si elle le conduisoit par le seul attouchement,*

Est à la vîtesse avec laquelle tournera la circonférence X *du pignon primitif, lorsque la dent de la roue le conduira par le point* E;

Comme le produit KB × AF,

Est au produit AB × KF.

Démonstration.

Représentons par la lettre V la vîtesse de la circonférence de la roue primitive, ou le chemin parcouru par un point de cette roue dans un instant; & représentons par la lettre u la vîtesse de la circonférence du pignon primitif, ou le chemin infiniment petit parcouru par un point de sa circonférence pendant que chaque point de la circonférence de la roue primitive parcourra le petit chemin V. Il faut démontrer qu'on aura $V : u :: KB \times AF : AB \times KF$.

Par les centres F, B de la roue & du pignon soient menées les perpendiculaires FI, BH à la droite HEI; la droite HEI sera tangente aux deux circonférences qui seroient décrites avec les rayons FI, BH: ainsi cette droite sera la direction commune des chemins infiniment petits que vont parcourir en même temps les points I, H; parce que les arcs infiniment petits que peuvent parcourir ces deux points, se confondent avec leurs tangentes. De plus les petits chemins que parcourront en même temps les points

I, *H* seront égaux; puisque le point *H* ira dans la même direction que le point *I* par lequel il est censé poussé par le moyen de la droite *IH*, & qu'il est évident que deux corps dont l'un pousse l'autre, ont la même vîtesse quand ils suivent le même chemin. Ainsi en nommant *I* la vîtesse que le plan de la roue a au point *I*, *I* sera aussi la vîtesse du point *H* du pignon.

Les arcs que décriront les deux points *A*, *I* attachés au plan du même cercle *R*, seront semblables, & par conséquent proportionnels aux circonférences entières que ces points peuvent décrire, & ces circonférences seront proportionnelles à leurs rayons *AF*, *IF*. Ainsi puisque *V* représente la vîtesse du point *A* ou de la circonférence *R*, & que *I* représente celle du point *I*, l'on aura $V : I :: AF : IF$.

Par la même raison, les chemins parcourus par les points *H*, *A* attachés au pignon seront proportionnels à leurs distances *HB*, *AB* du centre du pignon; & comme *I* est le chemin parcouru par le point *H* ou la vîtesse de ce point, & qu'on a représenté par *u* la vîtesse du point *A* du pignon, l'on aura cette proportion $I : u :: HB : AB$.

Multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $V : u :: AF \times HB : IF \times AB$.

Mais les triangles rectangles semblables *KBH*, *KFI* donneront . . . $HB : IF :: KB : KF$,

Et . . . . $AF : AB :: AF : AB$.

Ainsi en multipliant ces deux dernières proportions par ordre, on aura

$AF \times HB : IF \times AB :: KB \times AF : AB \times KF$.

Donc puisque $V : u :: AF \times HB : IF \times AB$.
on aura aussi... $V : u :: KB \times AF : AB \times KF$.

C. Q. F. D.

Corollaire I.

Fig. 172, 173, 174, 175, 176 & 177. 530. Quoiqu'on ait supposé dans le Théorème, que le pignon est conduit par la roue, il est évident qu'on trouvera la même proportion lorsque la roue sera menée par le pignon, c'est-à-dire qu'on aura $u : V :: AB \times KF : KB \times AF$.

Corollaire II.

Fig. 172, 173, 174, 175, 176 & 177. 531. On a vû (n°. 521) qu'en nommant R la force de la circonférence de la roue primitive, & P la force de la circonférence du pignon primitif, on aura ..... $R : P :: AB \times KF : KB \times AF$.

Et l'on vient de trouver (n°. 529) $V : u :: KB \times AF : AB \times KF$.

Ainsi en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura

$R \times V : P \times u :: AB \times KB \times KF \times AF : AB \times KB \times KF \times AF$,

& par conséquent $R \times V = P \times u$; c'est-à-dire que le produit fait de la force & de la vîtesse que la circonférence de la roue primitive a dans chaque instant, est égal au produit fait de la force & de la vîtesse que la circonférence du pignon a en même temps dans chaque instant de son mouvement : ainsi nommant ces deux produits les momens des circonférences primitives de la roue & du pignon, l'on pourra dire que ces circonférences primitives ont toûjours en même temps des momens égaux, soit

que la roue mène le pignon, soit que le pignon conduise la roue.

COROLLAIRE III.

532. Puisque $R \times V = P \times u$, on aura $R : P :: u : V$; c'est-à-dire que les forces contemporaines des circonférences primitives de la roue & du pignon qui engrène avec elle, sont réciproquement proportionnelles à leurs vîtesses contemporaines. Fig. 172, 173, 174, 175, 176 & 177.

Il suit de là que, à mesure que la force avec laquelle la circonférence de la roue primitive deviendra plus grande que la force avec laquelle la circonférence du pignon primitif tournera, la vitesse de la circonférence de la roue primitive deviendra moindre que celle de la circonférence du pignon primitif. Ainsi lorsque le point K sera au-dedans de la roue primitive, & que (n°. 523) la force avec laquelle tournera la circonférence de cette roue sera moindre que la force ave laquelle tournera la circonférence du pignon primitif, la vîtesse de la circonférence de la roue primitive sera plus grande que la vîtesse de la circonférence du pignon primitif. Au contraire lorsque le point K sera au dedans du pignon primitif, & que (n°. 524) la force avec laquelle tournera la circonférence de la roue primitive sera plus grande que la force avec laquelle tournera la circonférence du pignon primitif, la vîtesse de la circonférence de la roue primitive sera moindre que celle de la circonférence du pignon primitif. Fig. 173 & 176. Fig. 172 & 175.

COROLLAIRE IV.

533. Puisque la ligne BF des centres a été

Fig. 172, 173, 175 & 176. divisée en deux parties *AF*, *AB* proportionnelles aux nombres des dents de la roue & du pignon, & que les circonférences primitives *R*, *X* de la roue & du pignon sont dans le même rapport que *AF* & *AB* qui sont leurs rayons; ces circonférences primitives *R*, *X* sont proportionnelles aux nombres de leurs dents; & par conséquent si l'on prend pour chaque dent un plein & un vuide, comme cela doit être, l'arc primitif qui répondra à chaque dent de la roue, sera égal à l'arc primitif correspondant de chaque dent du pignon: & comme chaque dent de la roue est obligée de conduire une dent du pignon, ou réciproquement doit être menée par une dent du pignon, les arcs primitifs parcourus par deux dents correspondantes de la roue & du pignon pendant que l'une mènera l'autre, doivent nécessairement être égaux. Il suit de là que s'il y a quelques instans où la dent de la roue va plus vîte que la dent correspondante du pignon, il y aura d'autres instans où la dent de la roue ira moins vîte que celle du pignon; & réciproquement s'il y a quelque disposition de dents où la dent de la roue aille moins vîte que celle du pignon, il y en aura d'autres où la même dent de la roue ira plus vîte que celle du pignon.

Corollaire V.

Fig. 172, 173, 175 & 176. 534. Comme les vîtesses contemporaines des circonférences primitives de la roue & du pignon, sont réciproques aux forces contemporaines qu'elles ont pour tourner; il suit du dernier Corollaire, que si, dans quelques positions, la circonférence primitive de la roue tourne avec plus de force que celle du pignon, il y en aura nécessairement d'autres où la même

même circonférence primitive de la roue tournera avec moins de force que celle du pignon ; & réciproquement, s'il y a des instans où la circonférence primitive de la roue tourne avec moins de force que celle du pignon, il y en aura d'autres où elle tournera avec plus de force que celle du pignon.

Mais lorsque le point *K* où la droite *HEI* coupe la ligne des centres, est au dedans du cercle du pignon primitif, la circonférence primitive de la roue tourne avec plus de force que celle du pignon (*n*°. 524) ; & lorsque le point *K* est au dedans de la roue primitive, la circonférence de cette roue tourne avec moins de force que celle du pignon primitif (*n*°. 523) : & réciproquement (*n*°. 527) lorsque la circonférence primitive de la roue tourne avec plus de force que celle du pignon, le point *K* est au dedans du pignon primitif ; au contraire lorsque la circonférence du pignon primitif tourne avec plus de force que celle de la roue, le point *K* est au dedans de la roue primitive (*n*°. 527).

Donc si pendant quelques instans le point *K* où la droite *HEI* coupe la ligne des centres, est au dedans du pignon, il y aura nécessairement d'autres instans où ce point *K* sera au dedans de la roue : & réciproquement si le point *K* se trouve pendant quelques instans au dedans de la roue primitive, il y aura d'autres instans où ce point *K* se trouvera au dedans du pignon primitif. *Cette conséquence est ce que nous avions promis de démontrer* (*n*°. 528).

Il suit de là que si l'on gagne quelque chose à faire en sorte que le point *K* se trouve au dedans de la roue primitive ou au dedans du pignon primitif, pour donner de l'avantage au pignon sur la roue, ou

pour en donner à la roue sur le pignon, l'on se trouvera ensuite dans le cas opposé; c'est-à-dire que le point *K* se trouvera après cela dans le pignon primitif ou dans la roue primitive, & alors ce sera la roue qui aura de l'avantage sur le pignon, ou le pignon qui en aura sur la roue; & par conséquent on perdra ce qu'on avoit gagné.

Corollaire VI.

Fig. 174 & 177. 535. On peut donc regarder comme les figures les plus avantageuses qu'on peut donner aux dents des roues & des pignons d'une machine, celles qui font que les circonférences primitives de la roue & du pignon ont la même force & la même vîtesse pour tourner, & qui sont par conséquent courbées de manière que la perpendiculaire *HEI* menée par le point d'attouchement de leurs dents, rencontre la ligne des centres au point *A* où se terminent les rayons primitifs de la roue & du pignon. Car lorsque les dents de la roue & du pignon sont ainsi formées, la roue n'a pas besoin qu'on lui applique une si grande puissance pour mener le pignon, que si elles étoient formées d'une autre manière; puisque si pour procurer la même force au pignon, en diminuant la puissance appliquée à la roue, l'on fait en sorte que la droite *HEI* coupe la ligne des centres au dedans de la roue, il faudra ensuite appliquer à la roue une puissance plus grande que la force qu'on procurera au pignon, lorsque la droite *HEI* coupera la ligne *BF* des centres au dedans du pignon: ce qui arrivera nécessairement.

Définitions.

536. Soient dans un même plan deux cercles *CNP*, *CALMK* qui se touchent en *C* : si l'on fait roûler le premier sur la circonférence du second, & qu'on imagine un style ou traçoir fixé au point *C* de la circonférence du cercle roulant ; le style *C* pendant ce mouvement décrira sur le plan immobile du cercle *CALMK*, une courbe *CEGDK* que l'on nomme *Épicycloïde* ou *Roulette*. Fig. 178 & 179.

Le cercle *CNP*, qui en roulant décrit la roulette, s'appelle *Cercle générateur de la Roulette* ; & l'arc *CALMK* du cercle immobile sur lequel le cercle générateur a roulé, se nomme *Base de la Roulette.*

Lorsque le cercle générateur roule au dehors du cercle de sa base, comme dans la figure 178, l'épicycloïde se nomme *Roulette extérieure* ; & si le cercle générateur roule au dedans du cercle de sa base, comme dans la figure 179, l'épicycloïde se nomme *Roulette intérieure.*

Corollaire I.

537. Comme le cercle générateur, en roulant & passant successivement de sa première situation *CNP* à différentes positions *AEF*, *LGH*, &c, applique successivement toutes les parties de sa circonférence sur celles de sa base ; il est évident que la base *CALMK* de la roulette est égale à la circonférence du cercle générateur *CNPC*, & que chaque portion telle que *CA* ou *CL* &c. de la base, est égale à chaque partie *EA* ou *GL* &c. de la circonférence génératrice, qui a roulé sur elle. Fig. 178 & 179.

On poura donc décrire la roulette ou trouver

tant de points qu'on voudra de cette courbe, en décrivant des cercles *AEF*, *LGH*, &c. qui auront tous même rayon que le cercle générateur *CNP*, & qui toucheront la base *CALMK* aux points quelconques *A*, *L*, &c, & en faisant les longueurs des arcs *AE*, *LG*, &c. pris depuis leurs points d'attouchement avec le cercle de la base, égales à celles des arcs *CA*, *CL*, &c. de la base, compris entre les mêmes points d'attouchement *A*, *L*, &c. & l'origine *C* de la *Roulette*. Car ayant ainsi déterminé tant de points *E*, *G*, &. qu'on voudra, la courbe *CEGDK* qu'on fera passer par ces points & par l'origine *C* où l'on suppose que le style étoit placé lorsque le cercle générateur a commencé à rouler, sera une roulette.

Corollaire II.

Fig. 180. 538. Lorsque le cercle générateur *CNP* de la roulette, roule au dedans du cercle de sa base, & qu'il a pour diamètre le rayon *CB* de sa base; le point *C* où l'on suppose le style placé, ne sort pas du diamètre *CBK* du cercle de sa base: ainsi l'épicycloïde ou roulette décrite par ce style *C*, est un diamètre du cercle de la base. Pour le prouver, il suffit de faire voir que quand le cercle générateur en roulant sera parvenu dans une situation quelconque *AEB* qui peut représenter toutes les autres, le style *C* ne peut pas être ailleurs qu'au point *E* où la circonférence du cercle générateur qui a roulé, est rencontrée par le diamètre *CBK*.

Le cercle générateur *CNP* étant arrivé dans une situation quelconque *AEB* où il touche la circonférence de sa base en *A*, imaginons que le point *C* où est attaché le style, est situé en quelque point *O*

différent du point *E* : la longueur de l'arc *AC* sera égale à celle de l'arc *AO*, puisque l'arc *AO* aura roulé sur l'arc *AC*. Or le rayon de l'arc *AC* étant double de celui de l'arc *AO*, le nombre des degrés de l'arc *AO* sera double du nombre des degrés de l'arc *AC*, & la circonférence du cercle *AEB* passera par le centre *B* du cercle *CAK*. Donc l'angle *CBA* qui a son sommet au centre *B* du cercle de la base, & qui a par conséquent pour mesure l'arc entier *AC* compris entre ses côtés, sera égal à l'angle *OBA* qui a son sommet au même point *B* de la circonférence du cercle *AEB*, & qui a par conséquent pour mesure la moitié de l'arc *AO*. Mais il est impossible que l'angle *CBA* soit égal à l'angle *OBA*, à moins que le point *O* où l'on a supposé que le style *C* est arrivé, ne soit au point *E* où le diamètre *CBK* rencontre la circonférence du cercle roulant *AEB*. Donc le cercle générateur étant parvenu dans quelle situation *AEB* l'on voudra, le style *C* ne peut pas être ailleurs qu'au point *E* où le diamètre *CBK* rencontre la circonférence du cercle générateur dans sa position *AEB*; & par conséquent lorsque le cercle générateur de la roulette roule au dedans du cercle de sa base, & qu'il a pour diamètre le rayon de sa base, le style *C* ne sort pas du diamètre *CBK* : ainsi la roulette décrite par ce style *C* est un diamètre du cercle de sa base.

COROLLAIRE III.

539. Le cercle générateur de la roulette étant dans quelle position *AEB* l'on voudra, & touchant le cercle de sa base dans un point quelconque *A*; si par le point d'attouchement *A* & par le point *E* Fig. 181.

actuellement décrivant la roulette, on mène une droite *AE*, cette droite sera perpendiculaire à la courbure de la roulette au point *E*.

Pour le prouver, imaginons que le cercle générateur & le cercle de la base sont des polygones réguliers d'une infinité de côtés égaux chacun à chacun, lesquels s'appliquent les uns sur les autres, & dont les sommets des angles se joignent successivement, pendant que le polygone générateur roule sur sa base. Lorsque le sommet *A* d'un angle du polygone générateur tournera sur le sommet *A* d'un angle du polygone de la base, comme sur un point fixe, le point *E* actuellement décrivant la roulette, tracera un petit arc de cercle qui aura le point *A* pour centre, & la droite *AE* pour rayon. Mais un rayon est toûjours perpendiculaire à l'arc que son extrémité décrit. Donc *AE* est perpendiculaire à la petite portion de roulette que décrit le style *E* dans la position où il est.

Corollaire IV.

Fig. 181. 540. Le cercle générateur de la roulette étant dans la position quelconque *AEB*, & roulant sur sa base *CA*; si l'on joint les centres de ces deux cercles par une droite *FG* dont le prolongement *GB* rencontre la circonférence du cercle générateur en un second point *B*, & que par le point *B* l'on mène une droite *BE* au point *E* où la circonférence du cercle générateur rencontre la roulette du côté de son origine *C*, cette droite *BE* touchera la roulette au point *E*; car elle touchera le petit arc de cercle que décrira le point *E* pendant que *AE* tournera sur le point *A* comme sur un point fixe, & le petit

arc décrit par le point *E* pourra être considéré comme une petite partie de la roulette.

COROLLAIRE V.

541. Imaginons dans un même plan trois cercles *R*, *X*, *Y* qui se touchent au même point *A*, & dont les centres *F*, *B*, *G* soient par conséquent en ligne droite : si l'on fait tourner l'un de ces cercles sur son centre, & qu'il oblige les deux autres à tourner aussi sur leurs centres que nous supposerons fixes, en entraînant ces cercles par le point d'attouchement continuel *A* commun aux trois circonférences; il est clair que toutes les parties de la circonférence du cercle qu'on fera tourner, s'appliqueront successivement sur toutes les parties des circonférences des deux autres cercles, de la même manière que si les deux cercles *R* & *X* demeurant immobiles, le troisième *Y* rouloit sur les circonférences des deux premiers. Ainsi supposant qu'on attache un style à la circonférence du cercle *Y* mobile sur son centre seulement; lorsque les trois cercles auront été obligés de tourner par le mouvement de l'un d'eux qui aura entraîné les deux autres, & que le style se trouvera en *E*; si l'on fait chacun des deux arcs *AC*, *AH* égal à l'arc *AE*, le style actuellement placé en *E* aura décrit sur le plan mobile du cercle *R* à l'extérieur duquel il roule, une portion *CE* de roulette extérieure, & il aura tracé sur le plan mobile du cercle *X* au dedans duquel on peut considérer qu'il roule, une portion *HE* d'épicycloïde intérieure. Fig. 181.

Ces deux roulettes *CE*, *HE* tracées en même temps par le style *E* attaché à la circonférence du cercle *Y*, se toucheront au point *E*. Car la droite *AE*

menée par le point A où le cercle générateur Y touche ses bases R, X, sera perpendiculaire aux deux roulettes, & la droite bE touchera ces deux roulettes au même point E (*n°.* 540).

Corollaire VI.

Fig. 183. 542. Supposons maintenant que le cercle générateur Y a pour diamètre le rayon AB du cercle X au dedans duquel il se trouve, & que les trois cercles R, X, Y se touchent continuellement au point A: l'épicycloïde intérieure HE qui touchera l'extérieure CE, sera une ligne droite dirigée vers le centre B du cercle X, & sera par conséquent une portion du rayon BH qui touchera toûjours la roulette extérieure CE au point E où ce rayon sera rencontré par une perpendiculaire AE menée du point A sur lui.

Il suit de là que quand deux cercles R, X se toucheront continuellement, & que l'un obligera l'autre à tourner, en l'entraînant par le point d'attouchement A; si l'on imagine un rayon BH dans le cercle X, & qu'ayant fait $AC = AH$ on décrive par le point C pris pour origine, une roulette extérieure CE qui ait pour cercle générateur un cercle Y dont le diamètre soit égal au rayon BH, ce rayon BH pendant le mouvement des deux cercles R, X, touchera toûjours la roulette CE au point E où cette roulette sera coupée par la droite AE perpendiculaire à sa courbure. Ainsi au lieu de supposer que l'un des deux cercles R, X entraîne l'autre par le point d'attouchement A, l'on pourra faire pousser le rayon BH du cercle X, par une roulette CE attachée au cercle R, & décrite par le mouvement du cercle Y dont le diamètre est égal au rayon BH. On pourra aussi

réciproquement faire pousser l'épicycloïde CE attachée au cercle R, par un rayon BH du cercle X: & par le moyen de l'épicycloïde CE & du rayon BH, les deux cercles R, X pourront se conduire comme s'ils s'entraînoient par le point d'attouchement A.

C'est principalement de ce Corollaire que l'on déduira la détermination de la meilleure figure qu'on peut donner aux dents des roues & des pignons d'une machine, lorsqu'une partie de la dent de la roue ou du pignon, ou de tous les deux, doit être formée en ligne droite tendante au centre de la roue & du pignon.

COROLLAIRE VII.

543. Si dans le même plan l'on n'avoit que deux cercles R, Y qui se touchassent au point A, & si le mouvement de l'un se communiquoit à l'autre par ce point d'attouchement; un point quelconque E de la circonférence du cercle Y, décriroit sur le plan mobile du cercle R une épicycloïde CE, & cette épicycloïde supposée attachée au cercle R conduiroit le cercle Y, en le poussant par le point E de sa circonférence, de la même manière que le cercle R peut conduire le même cercle Y, en lui communiquant le mouvement par le point d'attouchement A: & réciproquement le point E de la circonférence du cercle Y tournant sur son centre G, feroit tourner le cercle R, en le poussant par la roulette CE supposée attachée à ce cercle R, de la même manière que le même cercle Y conduiroit le cercle R en lui communiquant son mouvement par le point d'attouchement A. Fig. 182 & 183.

Nous déduirons de ce Corollaire la meilleure figure qu'on peut donner aux dents d'une roue, lorsque le pignon sera une lanterne composée de fuseaux ; nous en conclurrons aussi la figure la plus avantageuse qu'on peut donner aux dents d'un pignon, lorsque la roue aura des fuseaux parallèles entr'eux au lieu de dents.

PROBLEME.

Fig. 184. 544. *Le nombre des dents d'une roue, & le nombre des fuseaux de la lanterne dans laquelle la roue doit engréner, étant donnés, avec la distance de leurs centres* FG ; *déterminer le rayon primitif & le rayon vrai de la roue, la grandeur & la figure de ses dents ; & la quantité de l'engrénage des dents de la roue dans la lanterne.*

Solution.

Comme un exemple est suffisant pour donner l'intelligence de ce Problème, & qu'une solution pour des nombres indéterminés de dents & de fuseaux pourroit le rendre obscur, sans le rendre plus facilement appliquable à des roues & à des lanternes dont les nombres des dents & des fuseaux seroient donnés ; on supposera que la roue doit avoir 30 dents, la lanterne 8 fuseaux, & que les centres *F*, G de la roue & de la lanterne doivent être aux extrémités de la droite donnée *FG*.

Puisque la roue doit avoir 30 dents, & qu'on demande une lanterne de 8 fuseaux, on divisera la ligne *FG* des centres en deux parties *AF*, *AG* qui soient entr'elles comme 30 & 8, ou comme 15 & 4. Pour cela on divisera la droite *FG* en 38 parties égales, c'est-à-dire en autant de parties qu'il y aura

de dents & de fuseaux ensemble dans la roue & dans la lanterne ; & ayant pris 8 parties pour *AG* & les 30 restantes pour *AF*, les droites *AF*, *AG* seront les rayons primitifs de la roue & de la lanterne.

Les rayons primitifs de la roue & de la lanterne étant ainsi déterminés, on cherchera la figure des dents de la roue ; & cette figure donnera le vrai rayon de la roue.

Pour déterminer la figure des dents, qui dépend toûjours de celle des fuseaux, on supposera d'abord que les fuseaux sont infiniment déliés, & représentés sur un plateau de la lanterne par les 8 points *A*, *E*, *H*, *I*, *K*, *i*, *h*, *e* ; & lorsqu'on aura trouvé la figure des dents propres à conduire ces fuseaux infiniment déliés dont on ne sauroit faire usage dans la pratique, on la corrigera & l'on tracera par son moyen la véritable figure qu'il faut donner aux dents des roues, pour conduire des lanternes à fuseaux cylindriques. Ainsi la solution du Problème proposé sera divisée en deux parties.

I.

Pour la figure des Dents de la Roue, lorsque les Fuseaux de la Lanterne sont infiniment déliés.

545. On a vû (*n*°. 543) que si le cercle *CAc* qui touche le cercle *EAe*, étoit garni à sa circonférence d'une épicycloïde *CE* décrite par le point *E* de la circonférence du cercle *EAe* pendant le roulement de ce cercle sur le cercle *CAc*, l'épicycloïde *CE* conduiroit le cercle *EAe* par le point *E*, de la même manière que le cercle *CAc* le conduiroit par le point d'attouchement *A*. Fig. 184.

On a vû auſſi, & il eſt évident, que ſi les deux cercles *CAc*, *EAe* ſe conduiſoient par leur point d'attouchement *A*, ces cercles auroient tous deux la même vîteſſe ; ainſi lorſque l'épicycloïde *CE* conduira le cercle *EAe* par un point *E* de ſa circonférence, les circonférences des deux cercles *CAc*, *EAe* auront la même vîteſſe, & par conſéquent la même force. L'épicycloïde *CE* eſt donc (*n°.* 535) la meilleure courbure que l'on puiſſe donner à la dent d'une roue, pour conduire une lanterne dont les fuſeaux ſont infiniment déliés.

A ne conſidérer que l'épicycloïde *CE*, & la propriété qu'elle a de faire tourner la lanterne primitive avec la même vîteſſe & la même force que la roue primitive, en pouſſant cette lanterne par un point *E* qui repréſente un fuſeau infiniment délié ; il eſt clair que ce ſera le côté convexe de cette épicycloïde qui conduira le fuſeau ou point *E*, lorſque ce fuſeau ſera mené de *A* vers *E*, & s'éloignera de la ligne des centres ; & que ce ſera ſon côté concave qui conduira le point *E*, lorſque ce point ſera mené de *E* vers *A*, & s'approchera de la ligne des centres.

Mais ſi l'on fait attention que les dents de la roue doivent engréner les unes après les autres dans la lanterne, & que chaque dent de la roue après avoir conduit un fuſeau doit s'échapper de la lanterne, & ne doit point empêcher la dent ſuivante de conduire le fuſeau ſuivant ; on reconnoîtra aiſément qu'il n'eſt pas poſſible que le côté concave de l'épicycloïde *CE* conduiſe le fuſeau *E* de la lanterne, & qu'il eſt par conſéquent impoſſible que l'épicycloïde faſſe tourner la lanterne en approchant de la ligne des centres le fuſeau qu'elle conduit. Car imaginons que le côté

concave de l'épicycloïde *CE* a conduit le fuſeau *E* jusqu'en *A*, & qu'elle eſt arrivée dans la poſition *AB*; elle ne pourra pas continuer de mener le fuſeau de *A* vers *e*; parce qu'on la ſuppoſe concave du côté qu'elle mène le fuſeau, & qu'il faudroit qu'elle fût convexe comme *AD* pour éloigner le fuſeau de la ligne des centres, & le conduire de *A* vers *e*. De plus le fuſeau *A* ſe trouvant accroché dans l'épicycloïde *AB*, cette épicycloïde ne pourroit pas ſe dégager de la lanterne pour laiſſer la liberté à une autre épicycloïde *CE* de conduire un autre fuſeau *E*. Ainſi il eſt impoſſible que les dents d'une roue ſoient figurées en épicycloïde concave du côté qu'elles conduiſent les fuſeaux, ſi l'on veut que la circonférence de la lanterne primitive ait la même vîteſſe & la même force que la circonférence de la roue primitive; & par conſéquent il eſt impoſſible auſſi que les fuſeaux d'une lanterne ſoient conduits par une roue, avant que d'être arrivés à la ligne des centres.

Puiſqu'une épicycloïde ne peut pas conduire un fuſeau vers la ligne des centres, l'épicycloïde *CE* doit néceſſairement mener le fuſeau *E* de *A* vers *E*, jusqu'à ce qu'un ſecond fuſeau ſoit arrivé en *A* dans la ligne des centres, & ſoit pris par une ſeconde épicycloïde *AB* qui conduira auſſi ce fuſeau *A* juſqu'à ce qu'un autre fuſeau *e* ſoit arrivé dans la même ligne des centres : & ainſi des autres fuſeaux de la lanterne & des autres dents de la roue.

Si l'on veut que la roue puiſſe mener la lanterne des deux côtés, je veux dire de *A* vers *E* & de *A* vers *e*; il eſt évident que chaque dent de la roue doit avoir les deux côtés oppoſés *CE*, *LM* formés en épicycloïdes égales, ſemblables & oppoſées, & que

la dent *CEML* doit être aſſez longue pour conduire le fuſeau *E*, juſqu'à ce que le fuſeau ſuivant ſoit arrivé dans la ligne des centres.

Comme on ſuppoſe les fuſeaux de la lanterne infiniment déliés; ſi les dents de la roue étoient parfaitement figurées & eſpacées également, auſſi-bien que les fuſeaux de la lanterne, on n'auroit beſoin que de vuides infiniment petits entre les dents voiſines de la roue pour recevoir les fuſeaux: mais comme on ne peut pas compter ſur une préciſion parfaite, on ſera obligé de laiſſer entre les dents de petits eſpaces vuides tels que *AL* pour le jeu des dents de la roue dans la lanterne, c'eſt-à-dire pour que la roue puiſſe mener la lanterne malgré les petites inégalités des dents & des fuſeaux. Ce vuide *AL* devant être proportionné à des inégalités qui ſont toûjours inconnues, on ne peut pas le déterminer: mais il vaux mieux le faire trop grand que trop petit.

On a toûjours ſuppoſé que les dents de la roue conduiſoient les fuſeaux de la lanterne; mais il eſt évident que les dents de la roue doivent avoir la même figure, lorſqu'elles ſont conduites par les fuſeaux. Il faut ſeulement remarquer que les fuſeaux de la lanterne conduiront les dents de la roue en allant vers la ligne des centres, & les abandonneront lorſqu'ils ſeront arrivés dans cette ligne; au lieu que les dents de la roue conduiſoient les fuſeaux en les éloignant de la ligne des centres, & après qu'ils étoient arrivés dans cette ligne.

Il réſulte de tout ce qu'on vient de dire, que pour déterminer la figure des dents de la roue qui doit conduire une lanterne à fuſeaux infiniment déliée, ou qui doit être conduite par cette lanterne, il

faut commencer par déterminer les rayons primitifs *AF*, *AG* de la roue & de la lanterne, & décrire leurs cercles primitifs *CAc*, *EHIKiheA*; puis divifer le cercle primitif de la roue en autant de parties égales *AC*, *Ac*, &c. qu'elle doit avoir de dents, c'eft-à-dire en 30 parties égales, en fuppofant, comme nous faifons, que la roue aura 30 dents; & partager le cercle du pignon primitif en autant de parties égales que ce pignon aura de fufeaux, c'eft-à-dire en 8 parties égales, puifqu'il doit avoir 8 fufeaux. Enfuite on peut fixer le vuide *AL* qu'on doit laiffer entre les dents de la roue, en faifant ce vuide plus ou moins petit, fuivant que la roue & la lanterne feront plus ou moins parfaites : ce qui doit dépendre de la prudence de l'Ingénieur qui conduira la machine, & du jugement qu'il portera de l'habileté de l'ouvrier par lequel elle fera exécutée. Enfin tous les vuides *AL*, *NC*, &c. qui doivent être entre les dents, étant fixés, & les pieds *cL*, *AN*, &c. de toutes les dents, étant par conféquent déterminés fur la circonférence primitive de la roue; on décrira par les extrémités des pieds de chaque dent, des épicycloïdes qui auront la circonférence de la roue primitive pour bafe, & le cercle primitif du pignon pour cercle générateur. Par exemple, *cL* étant le pied d'une dent, on décrira par les extrémités *c*, *L* de ce pied deux épicycloïdes oppofées *cEP*, *LMP* qui tourneront leurs convexités du côté des dents voifines, & qui ayant le cercle *CAc* pour bafe, auront le cercle *EHIKiheA* pour cercle générateur. On fera de même deux épicycloïdes femblables, égales & oppofées *ABQ*, *NOQ* par les extrémités *A*, *N* du pied *AN* d'une autre dent; & ainfi des autres.

Lorſqu'on aura décrit des épicycloïdes par les extrémités des pieds de toutes les dents, chaque eſpace *cPL* ou *AQN &c.* compris entre deux portions d'épicycloïdes oppoſées & le pied d'une dent, ſera la figure que les 30 dents de la roue doivent avoir pour conduire la lanterne de 8 fuſeaux infiniment déliés.

Chaque dent de la roue étant formée comme la dent *cPL* par deux épicycloïdes oppoſées *cEP*, *LMP* qui ſe terminent mutuellement par leur rencontre *P*; il eſt évident que la droite *FP* tirée du centre de la roue au point *P* où ſe rencontrent les deux épicycloïdes d'une même dent, eſt le plus grand rayon vrai que puiſſe avoir la roue relativement au vuide *AL* qu'on a laiſſé entre deux dents voiſines *cPL*, *AQN*.

Lorſque le fuſeau *E* aura été conduit juſqu'à ce que le fuſeau ſuivant *A* ſoit dans la ligne des centres, ce nouveau fuſeau *A* pourra être conduit à ſon tour par la dent *AQN*; & alors il ne ſera plus néceſſaire que le fuſeau *E* ſoit conduit par la dent *cPL*: on pourra donc retrancher de la dent *cPL* toute la quantité *EPM*, & ne conſerver pour la dent que la partie *cEML*. Ainſi un fuſeau *A* étant dans la ligne des centres, la droite *EF* tirée par un fuſeau E voiſin de celui qui eſt dans la ligne des centres, & par le centre *F* de la roue, ſera aſſez longue pour être le rayon vrai de la roue. Mais cette droite *EF* étant le plus petit rayon vrai que puiſſe avoir la roue, on pourra prendre pour le rayon vrai de la roue tant de lignes différentes qu'on voudra, pourvû qu'elles ne ſoient pas plus grandes que *FP*, ni moindres que *EF*.

Lorſqu'on

Lorsqu'on aura fixé le rayon vrai de la roue, qu'il est à propos de faire plus grand que EF & plus petit que FP, pour ne point tomber dans les extrémités ; on en retranchera le rayon primitif CF ou AF, & le reste sera la quantité de l'engrenage de la roue dans la lanterne.

II.

Pour la figure des dents de la Roue, lorsque les Fuseaux de la Lanterne sont des cylindres d'un diamètre fini.

546. On considèrera d'abord la lanterne comme si elle avoit des fuseaux infiniment déliés représentés par les centres A, E, H, I, K, i, h, e des petits cercles qui sont les sections des fuseaux perpendiculaires à leurs axes ; & l'on tracera, ainsi qu'il vient d'être dit, les dents CPL, AQN, &c. de la roue, comme si elle avoit à conduire une lanterne à fuseaux infiniment déliés, en observant de laisser pour le jeu de l'engrenage un petit vuide tel que AL entre toutes les dents. Ensuite on réformera toutes ces dents, pour les faire accorder avec les fuseaux d'un diamètre fini que la lanterne doit avoir. Fig. 185

Si le rayon des fuseaux que l'on suppose égaux, est donné ; on décrira avec ce rayon sur le plan de chaque dent, le plus qu'on pourra de petits arcs qui auront tous leurs centres dans les deux épicycloïdes qui forment cette dent ; & l'on tracera par tous ces petits arcs, deux courbes telles que RO, SO qui seront parallèles aux épicycloïdes entre lesquelles les premières dents sont renfermées. Ces nouvelles courbes RO, SO ou TY, VY étant ainsi décrites,

réformeront les premières dents *CPL*, *AQN*, *&c.* & comprendront entr'elles & le cercle primitif de la roue des espaces *ROS*, *TYV*, *&c.* qui seront les figures des dents que la roue doit avoir pour conduire les fuseaux *A*, *E*, *H*, *I*, *K*, *i*, *h*, *e* dont les diamètres sont donnés : en voici la démonstration.

Si l'on imagine que le centre *E* d'un fuseau est conduit par la dent *CPL*, la courbe *RO* qui est parallèle à l'épicycloïde *CP*, & qui n'en est éloignée que d'une quantité égale au rayon du fuseau *E*, touchera toujours la circonférence de ce fuseau; ainsi la courbe *RO* conduira le fuseau cylindrique, de la même manière que la dent *CPL* formée par des portions d'épicycloïdes conduiroit le centre *E* de ce fuseau; & par conséquent la dent *ROS* aura une figure convenable pour conduire la lanterne à fuseaux cylindriques. Il est évident que si tous les fuseaux de la lanterne sont de même diamètre, les autres dents de la roue étant formées de la même manière que la dent *ROS*, auront aussi la figure qu'elles doivent avoir pour conduire la lanterne.

Si le rayon des fuseaux de la lanterne n'est pas donné; s'il faut corriger les premières dents *CPL*, *AQN* de la roue, de manière que les nouvelles dents laissent entr'elles des vuides égaux à la largeur de leurs pieds; & si l'on veut que le jeu de l'engrenage soit toûjours égal à *AL*; on divisera en deux parties égales *CD*, *DL* le pied *CL* de la dent : & ayant pris de part & d'autre du point *D* deux parties *DR*, *DS* égales au quart de l'arc *AC*, l'arc *RS* sera le pied de la nouvelle dent qu'on demande. Ensuite d'un rayon égal à la corde de l'arc *CR*, on tracera les cercles *A*, *E*, *H*, *I*, *K*, *i*, *h*, *e*

qui représenteront les grosseurs des fuseaux de la lanterne. Enfin pour achever de corriger les premières dents de la roue, on décrira avec le même rayon sur le plan de chacune d'elles, le plus qu'on pourra de petits arcs qui auront leurs centres dans les épicycloïdes qui renferment les premières dents; & en faisant passer, comme il a été dit, par tous ces petits arcs, des courbes telles que *RO*, *SO* ou *TY*, *VY*, on aura de nouvelles dents *ROS*, *TYV* qui laisseront entr'elles des vuides égaux à la largeur de leurs pieds, qui auront dans l'engrenage le jeu demandé, & qui conduiront les fuseaux dont on vient de déterminer les grosseurs, de la même manière que les premières dents auroient conduit des fuseaux infiniment déliés.

Comme les deux côtés courbes de chacune des nouvelles dents se terminent mutuellement en se rencontrant; il est clair que la distance *O F* de la pointe de l'une de ces nouvelles dents au centre de la roue, sera le plus grand rayon vrai que puisse avoir la roue.

Lorsqu'un fuseau *E* aura été conduit jusqu'à ce que le centre *A* du fuseau suivant soit dant la ligne *GF* des centres, le fuseau *A* pourra être conduit à son tour par la dent suivante *TYV*: & alors il ne sera plus nécessaire que la dent *ROS* conduise le fuseau cylindrique *E*. On pourra donc terminer la dent *ROS* au point *X* où elle touchera le fuseau *E* lorsque le centre du fuseau suivant sera dans la ligne des centres; & la distance *XF* de ce point d'attouchement au centre de la roue, sera le plus petit rayon vrai que puisse avoir la roue.

Pour déterminer le point *X* où la dent *ROS* touche le fuseau *E*, l'on menera par le centre de ce

fuseau & par le point *A*, la droite *EA*; & le point *X* où cette ligne *EA* rencontrera la circonférence du fuseau cylindrique, sera celui où la dent *ROS* touchera le fuseau. Car puisque (*constr.*) la courbe *RO* est éloignée de l'épicycloïde *CP* d'une quantité égale au rayon *EX* du fuseau; si l'on retranche ce rayon *EX* de la droite *AE* qui est perpendiculaire à l'épicycloïde (*n°.* 539), le point *X* sera nécessairement dans la courbe *RO* parallèle à l'épicycloïde; ainsi le cylindre *E* & la courbe *RO* se toucheront au point *X* où la droite *AE* rencontre la circonférence du fuseau.

Comme on pourroit rendre l'engrenage trop foible, en ne voulant donner aux dents de la roue que la longueur qu'on vient de déterminer, il sera à propos de donner au rayon vrai de la roue une longueur moyenne entre *OF* & *XF*, & de rogner la pointe de la dent comme on le voit dans la figure 185.

Les dents de la roue étant ainsi construites, il est clair qu'elles ne conduiront les fuseaux qu'après que leurs centres seront arrivés dans la ligne des centres; & que les fuseaux au contraire conduiront ces dents en les menant vers la ligne *GF* des centres, & jusqu'à ce que leurs centres soient arrivés dans cette ligne.

Si l'on retranche le rayon primitif de la roue, de son rayon vrai qu'on aura choisi, le reste sera la quantité de l'engrenage des dents de la roue dans la lanterne primitive: & comme le demi-diamètre de chaque fuseau entrera nécessairement dans la roue primitive, la quantité totale de l'engrenage sera égale à la somme faite du demi-diamètre du fuseau, & de

l'excès du rayon vrai de la roue sur son rayon primitif.

La distance *FG* des centres de la roue & de la lanterne étant donnée, il sera aisé de déterminer par le calcul la longueur du plus petit rayon vrai de la roue, lorsque le nombre des fuseaux de la lanterne & le nombre des dents de la roue seront aussi donnés: en voici un exemple.

Supposons que la roue doit avoir 30 dents, que la lanterne aura 8 fuseaux, & que la distance *FG* du centre de la roue au centre de la lanterne est de 3 pieds ou de 36 pouces.

On trouvera premièrement le rayon primitif de la roue par cette proportion 38 : 30 :: 36 pouces à un quatrième terme $\frac{30 \times 36 \text{ pouc.}}{38}$ qui sera le rayon primitif *AF* de la roue. Le calcul étant fait, on trouvera ce rayon primitif *AF* = 28, 421 pouces; ôtant de *FG* = 36 pouces ce rayon primitif de la roue, le reste 7, 579 pouces sera le rayon primitif *AG* de la lanterne.

La lanterne ayant 8 fuseaux, la corde *AE* menée par les centres de deux fuseaux voisins, sera la corde de 45 degrés, & sera par conséquent le double du sinus de 22° 3'. Ainsi pour trouver *AE* l'on fera cette proportion:

Comme le sinus total 100000;

Est au double du sinus de 22° 30', *c'est-à-dire à* 76537;

Ainsi le rayon primitif de la lanterne qui est de . . . . 7, 579 pouces,

Est à la corde AE *qu'on trouvera de* 5, 800 pouce

La roue ayant 30 dents, l'arc AC qui comprend dans le cercle primitif de la roue, le plein d'une dent & le vuide qui sépare deux dents, sera de 12 dégrés dont le quart est 3 degrés. Ainsi lorsqu'on voudra faire le plein de chaque dent égal au vuide qui les sépare, on fera les deux arcs DR & DS chacun de 3 degrés.

Supposons que le jeu AL de l'engrenage doit être de 1 degré : le pied de la dent CPL terminée par deux épicycloïdes CEP, LP sera de 11 degrés, & sa moitié DC ou DL sera de 5° 30′ dont il faudra ôter DR ou DS qui sera de 3 degrés; & il restera 2° 30′ pour chacun des deux arcs CR, LS qu'il faudra retrancher du pied de la dent CPL pour la corriger. La corde de l'arc CR ou LS sera donc double du sinus de 1° 15′ : ainsi pour trouver la longueur de cette corde, on fera cette proportion :

Comme le sinus total 100000,

Est au double du sinus de 1° 15′, *c'est-à-dire à* 4363;

Ainsi le rayon primitif AF *de la roue qu'on a trouvé de* . . . . 28, 421 pouces,

Est à la corde de l'arc CR *ou* LS.

Le calcul étant fait, on trouvera que la corde de l'arc CR est de 1, 24 pouces.

Le rayon EX de chaque fuseau devant être égal à la corde de l'arc CR, on aura aussi $EX = 1, 24$ pouc. Ainsi les diamètres des fuseaux de la lanterne seront de 2, 48 pouc.; & puisqu'on a trouvé $AE = 5, 800$ pouc. & $EX = 1, 240$ pouc., on aura $AX = 4, 56$ pouc.

Pour déterminer le plus petit rayon vrai que peut

avoir la roue, on remarquera que dans le triangle *XHF*, on connoît le côté *AX* qu'on a trouvé de 4, 56 pouc., le côté *AF* qu'on a trouvé de 28,421 pouc.; & que l'angle *XAF* étant le supplément de l'angle *EAK* qui vaut 67° 30', sera de 112° 30'. On déterminera donc par les règles de la Trigonométrie la longueur du rayon vrai *XF*, comme il suit :

La somme des deux côtés AX; AF 32,981 pouc.,
Est à leur différence . . . . 23,861 pouc.;
Comme la tangente de la moitié de l'angle EAK *ou de* 33° 45', *qui est* 66818,
Est à la tangente de la demi-différence des deux angles AXF; AFX.

Le cacul étant fait, on trouvera cette tangente de 48341, qui répond à un angle de 25° 48'.

Ajoûtant cet angle de 25° 48' avec 33° 45' valeur de la moitié de la somme des deux angles *AXF*, *AFX*, la somme 59° 33' sera égale à l'angle *AXF*.

L'angle *AXF* étant trouvé de 59° 33', & l'angle *XAF* étant donné ou connu de 112° 30', dont le supplément est 67° 30', & le côté *AF* étant trouvé de 28, 421 pouces, on fera cette proportion;

Comme le sinus de l'angle AXF *ou de* 59° 33'... 86207;
Est au sinus de l'angle XAF *ou* EAK *de* 67° 30'... 92388;
Ainsi AF = ... 28, 421 pouces,
Est à XF *rayon vrai le plus petit que la roue puisse avoir*, & *qu'on trouvera de* . . . . 30, 458 pouces.

Ainsi en supposant que la distance *FG* des centres d'une roue de 30 dents & d'une lanterne de 8 fuseaux, est de 36 pouces, que le jeu de l'engrenage doit

être d'un degré, & que le plein de chaque dent doit être égal au vuide qui se trouve entre deux dents; on trouve

Le rayon primitif de la roue, de . . . 28,421 pouc.
Et celui de la lanterne, de 7,579
Le plus petit rayon vrai de la roue, de 30,458
La quantité dont la roue engrène dans la lanterne primitive, de 2,037
Le demi-diamètre du fuseau ou la quantité dont la lanterne engrène dans la roue primitive, de 1,24
La quantité totale de l'engrenage, de 3,277
Le rayon vrai de la lanterne, de . . . 8,819

Si les diamètres des fuseaux de la lanterne avoient été donnés, on auroit eu moins de calcul à faire pour déterminer le rayon vrai de la roue; car après avoir trouvé A E, *on en auroit retranché le rayon* E X *du fuseau, & l'on auroit achevé le calcul comme on vient de l'expliquer.*

Remarque.

Fig. 181. 547. La figure des dents de la roue étant déterminée, comme on vient de le dire, on enfonce dans le corps de la roue primitive les vuides qui sont entre ses dents, & l'on dirige les côtés *TZ*, *S* & des enfonçures vers le centre *F* de la roue. Ces enfonçures servent à loger les fuseaux qui ne doivent être rencontrés que par les dents qui les mènent, sans quoi la machine seroit sujète à des arboutemens qui gêneroient son mouvement, & qui pourroient

même l'empêcher d'aller, s'ils étoient considérables.

On a vû (n°. 542) & l'on verra encore dans le Problème suivant, que les côtés *TZ*, *S&* des vuides enfoncés dans la roue primitive, étant dirigés vers le centre *F* de la roue, l'arrondissement du fuseau qui sort du cercle primitif de la lanterne, devroit avoir la figure d'une épicycloïde qui auroit pour base le cercle primitif de la lanterne, & qui seroit engendrée par un cercle d'un diamètre égal au rayon *AF* de la roue. Ainsi le fuseau circulaire ne paroît pas propre à être mené vers la ligne des centres par le côté *TZ* du vuide enfoncé dans la roue primitive. Mais le fuseau précédent *E* étant conduit par la dent précédente de la roue, jusqu'à ce que le centre du fuseau *A* soit arrivé dans la ligne des centres, & l'espace *TA* que la droite *TZ* doit faire parcourir au fuseau avant qu'elle arrive à la ligne des centres, étant fort court; l'arc du fuseau sur lequel glissera le côté *TZ* en poussant ce fuseau, sera si petit, qu'on le pourra prendre pour un petit arc d'épicycloïde; & par conséquent s'il y a quelque inégalité dans la conduite de la lanterne par la roue, pendant que la partie *TZ* de la dent poussera le fuseau, cette inégalité sera si petite qu'elle ne pourra pas être sensible.

Il y a un moyen de sauver cette petite inégalité, dans le cas où la lanterne n'a pas un trop petit nombre de fuseaux, & que les fuseaux ne sont pas d'un trop grand diamètre. On peut faire conduire le fuseau précédent *E* par la dent *RXxS* jusqu'à ce que la droite *TZ* soit arrivée dans la ligne des centres. Car alors la droite *TZ* ne sera pas obligée de conduire le fuseau *A*, & il n'y aura que la partie courbe *TV* de la dent qui sera chargée de le mener : & comme Fig. 186.

cette partie courbe de la dent à la figure convenable pour conduire le fuseau en l'éloignant de la ligne des centres, la lanterne sera menée par la roue sans aucune inégalité.

Mais en faisant conduire le fuseau *E* par la dent *R X x S* jusqu'à ce que la partie droite *TZ* de la dent suivante soit arrivée dans la ligne des centres, la longueur qu'on vient de déterminer pour le plus petit rayon vrai de la roue, sera trop petite, & il faudra chercher un autre rayon vrai plus long.

Supposons, comme on a déjà fait, que la roue aura 30 dents, la lanterne 8 fuseaux, & que la distance *FG* des centres de la roue & de la lanterne sera de 36 pouces. Supposons aussi, pour faciliter le calcul, que les fuseaux auront 2 pouces de diamètre ou 1 pouce de rayon, & que le jeu de la roue dans l'engrenage doit être d'un degré.

Le rayon primitif *FT* de la roue sera (*n°.* 546) de . . . . 28, 421 pouc.,
Et celui *GA* ou *GT* de la lanterne sera de 7, 579 pouc..

Si du centre *A* du fuseau l'on mène une perpendiculaire *AB* à la droite *FG* qui touche ce fuseau & qui joint les centres de la roue & de la lanterne, cette perpendiculaire sera le rayon du fuseau. Ainsi retranchant le quarré du rayon de ce fuseau ou le quarré d'un pouce, du quarré du rayon *AG* de la lanterne, c'est-à-dire du quarré de 7, 579 pouces, qui est 57, 441241 pouces quarrés; & tirant la racine quarrée du reste 56, 441241 pouc. quar., le nombre 7, 513 pouc. qu'on trouvera sera la valeur de *GB* : & comme on suppose *FG* = 36 pouc., on aura *FB* = 28, 487 pouc.;

Le côté $FB = 28, 487$ pouces du triangle rectangle ABF étant considéré comme le sinus total, & le côté $AB = 1$ pouce étant regardé comme la tangente de l'angle AFB, on trouvera cet angle AFB de $2^\circ\ 0'\frac{5}{8}$; & par conséquent l'angle BFb qui comprendra le fuseau A sera de $4^\circ, 1'\frac{1}{4}$.

Le côté $GB = 7, 513$ pouces du triangle rectangle ABG, étant pris aussi pour le sinus total, & le côté $AB = 1$ pouce étant considéré comme la tangente de l'angle AGB, on trouvera cet angle AGB ou l'arc TA de $7^\circ.\ 35'$.

La lanterne ayant 8 fuseaux également espacés, l'arc AE compris entre les centres de deux fuseaux voisins sera de 45°; ainsi la somme des deux arcs TA, AE, ou l'arc TAE sera de $52^\circ\ 35'$, & l'on trouvera sa corde $TE = 6{,}714$ pouces.

Enfin si de cette corde on retranche 1 pouce pour le rayon EX du fuseau, on aura $TX = 5{,}714$ pouces.

L'arc TAE ayant été trouvé de $52^\circ\ 35'$, on aura la somme des deux angles TFX, TXF ou le seul angle ETG de $63^\circ\ 42'\frac{1}{2}$.

Connoissant dans le triangle XTF les deux côtés TX, TF avec la somme des deux angles TFX, TXF opposés à ces deux côtés, on trouvera (*Géom. n°.* 588) l'angle TFX de $9^\circ\ 24'$, & le côté $XF = 31, 374$ pouc. Ainsi la longueur du plus petit rayon vrai XF que la roue puisse avoir pour conduire la lanterne uniformément, sera déterminé.

La dent $RXxS$ ayant commencé à mener le fuseau E lorsque sa partie droite RY étoit en TZ sur la ligne des centres, & n'ayant point cessé de le pousser que la partie droite TZ de la dent suivante

ne fût arrivée dans la même ligne des centres; l'arc *TR* de la roue primitive comprend une dent pleine & un vuide : & comme cette roue a 30 dents & 30 vuides, l'arc *TR* contient la trentième partie de la circonférence, c'est-à-dire 12 degrés.

Mais on a trouvé l'angle *TFX* de... 9° 24';
ainsi l'on aura l'angle *RFX* ou l'arc *RD* de 2° 36'.

L'angle *BFb* ou *TFb* qui comprend le fuseau, étant de .... 4° 1' $\frac{1}{4}$.

Et l'angle *bFS* du jeu qu'on veut donner à la roue dans l'engrenage, étant de 1°;

L'angle *BFS* ou l'arc *TS* sera de .. 5° 1' $\frac{1}{4}$.

Et comme l'arc *TR* est de .... 12°,

La dent *RXxS* occupera sur la circonférence de la roue primitive, un arc *RS* de 6° 58' $\frac{3}{4}$.

Or l'arc *RS* qui fera le pied de la dent *RXxS*, étant plus grand que le double de l'arc *RD* qui répond à la courbe *RX* par laquelle le fuseau *E* est mené, on pourra renfermer cette dent entre deux courbes *RX*, *Sx* égales, semblables & semblablement placées par rapport à elle, & la terminer par un arc *Xx* concentrique à la roue.

Les deux courbes *RX*, *Sx* qui forment les côtés de la dent, étant égales, semblables & semblablement placées par rapport à elle, les deux angles *RFX*, *SFx* seront égaux, & chacun d'eux sera par conséquent de 2° 36'. Donc si l'on retranche la somme 5° 12' de ces deux angles, de l'angle *RFS* ou de l'arc *RS* qu'on a trouvé de 6° 58' $\frac{3}{4}$, le reste 1° 46' $\frac{3}{4}$ sera la mesure de l'angle *XFx* ou de l'arc *Xx* concentrique à la roue, par lequel la dent *RXxS* sera terminée.

Il résulte de cette remarque que, si une roue de 30 dents doit conduire uniformément une lanterne de 8 fuseaux, en ne poussant ces fuseaux qu'après qu'ils auront passé la ligne des centres, si le jeu de la roue dans l'engrenage est d'un degré, que la distance *FG* des centres de la roue & de la lanterne soit de 36 pouces, & que le diamètre de chaque fuseau soit de deux pouces;

Le rayon primitif { de la roue sera de 28, 421 pouc. / de la lanterne sera de 7, 579

Le rayon vrai { de la roue sera de 31, 374 / de la lanterne sera de 8, 579

L'angle *RFS* qui renfermera une dent pleine de la roue sera de . . . . 6° 58′ 3/4.

L'arc *Xx* mené concentriquement à la roue pour terminer la dent sera de . . . 1° 46′ 1/4.

PROBLEME.

548. *Connoissant le nombre des dents d'une roue, & le nombre des aîles du pignon dans lequel elle doit engrener, avec la distance* FB *de leurs centres; trouver leurs rayons primitifs & leurs rayons vrais, & déterminer la figure des dents de cette roue & la figure des aîles de ce pignon.* Fig. 170

SOLUTION.

1°. Ayant divisé la distance *FB* des centres en deux parties *AF*, *AB* proportionnelles au nombre des dents de la roue, & au nombre des aîles du pignon; ces deux parties *AF*, *AB* seront les rayons

primitifs de la roue & du pignon : & si de ces deux parties prises pour rayons, & des points *F*, *B* comme centres, on décrit deux circonférences *R*, *X*, ces circonférences, qui se toucheront au point *A*, seront celles de la roue & du pignon primitifs. Ainsi les rayons & les cercles primitifs de la roue & du pignon seront déterminés. C. Q. F. 1°. T.

2°. On fend ordinairement une roue de manière que les largeurs des dents soient égales à celles des vuides, ce qui s'appelle *fendre une roue tant plein que vuide*. Dans ce cas on divise la circonférence primitive *R* de la roue en deux fois autant de parties égales qu'elle doit avoir de dents, pour fixer les pieds *CA*, *LQ*, &c. de ses dents & les vuides *AL*, *GQ*, &c. qui doivent être entr'elles. Mais si l'on vouloit que la roue fût fendue plus pleine que vuide, comme il est à propos de le faire dans certaines circonstances; & comme on le verra dans le Scholie de ce Problème ; on diviseroit d'abord la circonférence primitive en autant de parties égales *CL*, *LG*, &c. qu'elle doit avoir de dents, & l'on partageroit ensuite chaque partie telle que *CL* en deux autres parties *CA*, *AL* égales, l'une à la largeur qu'on veut donner à chaque dent, l'autre à la largeur du vuide qu'on veut mettre entre deux dents. Les pieds *CA*, *LQ*, &c de toutes les dents étant déterminés sur la circonférence primitive de la roue, on mènera par leurs extrémités vers le centre de la roue, des droites *Cc*, *Aa*, *Ll*, *Qq*, &c à peu près égales aux largeurs *CA*, *LQ* de ces pieds, pour marquer les flancs droits des dents ; & l'on décrira par les extrémités de chaque pied tel que *CA*, deux épicycloïdes égales *CP*, *AP* dont le cercle générateur *Y* aura pour diamètre le rayon *AB*

du pignon, & qui auront toutes deux pour base la circonférence primitive de la roue. Ces épicycloïdes étant tracées renfermeront les parties des dents, qui sailleront au delà du cercle primitif de la roue; en sorte que la droite *FP* menée du centre de la roue au point *P* où se rencontreront les deux épicycloïdes d'une dent, sera le plus grand rayon vrai que puisse avoir la roue relativement aux pleins qu'on aura donnés aux dents, & aux vuides qu'on aura mis entr'elles. La figure des dents de la roue & son plus grand rayon seront donc déterminés. *C. Q. F.* 2°. *T.*

3°. Ayant divisé la circonférence primitive *X* du pignon en autant de parties égales *OH*, *HS*, *ST*, *TZ*, *ZO* qu'il doit avoir d'aîles, on partagera encore chaque partie telle que *OH* en deux autres parties *Oo*, *oH* égales l'une à l'épaisseur qu'on veut donner à l'aîle, l'autre à la largeur du vuide qui doit être entre deux aîles; en observant que la largeur *oH* du vuide doit être un peu plus grande que celle *AC* de la dent de la roue, afin que cette dent y puisse entrer, & qu'il y ait un jeu convenable dans l'engrenage. Les largeurs *Oo*, *Hh*, &c de toutes les aîles du pignon étant ainsi déterminées sur la circonférence primitive du pignon, on mènera par leurs extrémités vers le centre *B* du pignon, des droites un peu plus longues que la saillie *Pp* des dents de la roue au delà de son cercle primitif; & ces droites qui serviront de flancs aux aîles du pignon, détermineront les vuides dans lesquels les dents de la roue engrèneront avec un jeu convenable. Ensuite on décrira par les extrémités des flancs de chaque aîle, deux épicycloïdes telles que *Om*, *om* dont le cercle générateur *V* aura pour diamètre le rayon *AF* de la roue, & qui auront toutes deux

pour base la circonférence primitive du pignon. Ces épicycloïdes étant tracées renfermeront entr'elles les parties des aîles qui failleront au delà du cercle primitif du pignon; en sorte que la droite *B m* tirée du centre du pignon au point *m* où se rencontreront les deux épicycloïdes d'une même aîle, sera le plus grand rayon vrai que puisse avoir le pignon relativement à l'épaisseur de ses aîles. La figure des aîles du pignon & la longueur de son plus grand rayon seront donc trouvées: C. Q. F. 3°. T.

Démonstration.

On a vû (*n°.* 542) que si le rayon *BH* de la circonférence primitive du pignon, est poussé par une épicycloïde *CP* saillante au dehors du cercle primitif R de la roue, & engendrée dans le roulement du cercle *Y* sur la circonférence primitive de la roue; le pignon tournera de la même manière, c'est-à-dire avec la même force & la même vîtesse que la roue, comme si la circonférence primitive du pignon étoit entraînée par celle de la roue au moyen de leur attouchement, ou d'un engrenage infiniment petit. On a vû aussi (*n°.* 542) que si l'épicycloïde *O Mm* saillante au delà du cercle primitif du pignon, & décrite dans le roulement du cercle *V* sur la circonférence primitive du pignon, est poussée vers la ligne des centres par le rayon *LF* de la roue, les circonférences primitives de la roue & du pignon tourneront avec la même force & la même vîtesse. Enfin l'on a démontré que les deux côtés opposés de la dent *cCPAa* & ceux des aîles du pignon, devoient avoir la même figure pour la facilité de l'engrenage, & pour donner au rouage la faculté de pouvoir

être mené en sens contraire. Or en partant de ces principes, il est évident que les figures qu'on a données aux dents de la roue & aux aîles du pignon dans la solution du Problème, sont convenables pour faire mener le pignon par la roue, ou la roue par le pignon, avec une régularité parfaite. Et comme les figures des dents de la roue & des aîles du pignon déterminent nécessairement leurs rayons vrais, le Problème est résolu. *C. Q. F. D.*

Scholie.

549. Comme la partie courbe de la dent de la roue doit pousser le flanc droit *HK* de l'aîle du pignon, en l'éloignant de la ligne des centres, & que le point *E* où ce flanc sera rencontré par une perpendiculaire *AE* menée du point *A* sur lui, sera toûjours celui par lequel la dent le poussera; il est clair que la dent *CPG* cessera de mener l'aîle *HK*, lorsque l'extrémité *P* de cette dent touchera cette aîle au point *E* où elle sera rencontrée par une droite *AE* menée du point *A* perpendiculairement sur elle. Donc si l'extrémité *P* de la dent arrive à ce point *E* avant que le flanc *ON* de l'aîle suivante soit arrivé dans la ligne des centres, la partie courbe *OMm* de cette aîle sera nécessairement poussée par le flanc droit *LI* de la dent suivante: en sorte que la roue conduira le pignon en poussant ses aîles tantôt avant & tantôt après la ligne des centres. Fig. 169.

Mais si l'extrémité *P* de la dent *CPG* n'arrive au point *E*, & ne cesse de pousser le flanc *HK* de l'aîle qu'après que le flanc *AN* de l'aîle suivante sera arrivé dans la ligne des centres, ou aura passé cette ligne; il ne sera pas nécessaire que les parties courbes Fig. 189, 191 & 193.

des aîles soient poussées par les flancs droits des dents de la roue. Ainsi la roue pourra conduire le pignon, en poussant ses aîles seulement après la ligne des centres.

Comme la dent frotte contre l'aîle en entrant dans le pignon, lorsqu'elle la pousse avant la ligne des centres; qu'au contraire elle frotte contre l'aîle en se retirant du pignon, lorsqu'elle la pousse après la ligne des centres; & que le frottement qui se fait en entrant est plus dur que celui qui se fait en sortant, parce que dans le premier il peut se faire des arboutemens, principalement lorsque les parties qui frottent ne sont pas bien dures & polies : tous les gens d'art conviennent qu'il est beaucoup plus avantageux de ne faire pousser les aîles des pignons qu'après la ligne des centres, que de les faire pousser tantôt avant & tantôt après cette ligne; & que si l'on ne peut pas se dispenser de faire prendre les aîles par les dents de la roue avant la ligne des centres, il faut les faire prendre le plus près qu'on peut de cette ligne.

L'avantage que les pignons d'un certain nombre d'aîles ont de pouvoir être menés par les roues, en faisant pousser leurs aîles uniquement après la ligne des centres, pendant que ceux qui en ont moins ne peuvent être conduits uniformément qu'en faisant pousser leurs aîles en partie avant & en partie après la ligne des centres, oblige à faire sur les pignons, relativement aux différens nombres de leurs aîles, quelques observations qui feront autant d'articles de ce Scholie.

I.

Pour les Pignons de 7 aîles.

550. *Une roue de 50 dents ne peut pas conduire uniformément un pignon de 7, en poussant ses aîles uniquement après la ligne des centres.* Fig. 187.

Pour que les aîles du pignon de 7 ne soient poussées qu'après la ligne des centres, il ne faut pas que la dent *CEG* quitte l'aîle *HB*, avant que l'aîle suivante *AB* soit arrivée dans la ligne *BF* des centres; pour être conduite à son tour après cette ligne. Et comme dans le pignon de 7 aîles, l'angle *ABH* compris entre deux flancs par lesquels deux aîles voisines peuvent être poussées d'un même côté, est de 51° 25′ 43″ à peu de chose près; lorsque la dent *CEG* quittera l'aîle *HB*, l'angle *FBH* sera aussi de 51° 25′ 43″ à peu de chose près.

En supposant que le rayon primitif *AB* du pignon de 7 aîles est de 7 parties, & résolvant le triangle *ABE* rectangle en *E* (*n°.* 549), on trouvera *BE* de 4, 364 parties.

Le rayon primitif *AB* du pignon de 7 aîles étant supposé de 7 parties, & la roue ayant 50 dents, son rayon primitif *AF* sera de 50 parties; & par conséquent la distance *BF* des centres du pignon & de la roue sera de 57 parties. Ainsi l'on connoîtra dans le triangle *EBF* les deux côtés *BE*, *BF* avec l'angle *EBF* qu'ils renferment; & résolvant ce triangle, on trouvera l'angle *EFB* de 3° 35′ 50″ à peu de chose près.

La roue étant supposée de 50 dents, l'angle *BFC* ou *AFC* qui doit comprendre le plein & le vuide

d'une dent sera de 7° 12'; & si de cet angle on retranche l'angle *EFB* qu'on vient de trouver de 3° 35' 50", il restera 3° 36' 10" pour l'angle *CFE*.

Les deux épicycloïdes *CE*, *GE* qui terminent une même dent, devant être égales, semblables & semblablement placées par rapport au rayon vrai *FE*, & l'angle *CFE* ayant été trouvé de 3° 36' 10"; l'angle *CFG* qui doit contenir le plein d'une dent, sera de 7° 12' 20", & se trouvera par conséquent de 20" plus grand que l'angle *AFG* qui doit contenir le plein & le vuide d'une dent : ce qui est impossible, puisque la partie ne peut pas être plus grande que le tout. Donc il est aussi impossible qu'une roue de 50 dents puisse conduire uniformément un pignon de 7, en poussant ses aîles uniquement après la ligne des centres.

Une roue de 50 dents ne pouvant point mener uniformément un pignon de 7 aîles, en ne poussant ses aîles qu'après la ligne des centres, une roue qui aura moins de 50 dents sera encore moins propre à le faire: & quoique dans une roue qui auroit plus de 50 dents, l'angle qu'on trouveroit pour le plein d'une dent pût être moindre que celui qui doit comprendre le plein & le vuide, ce qu'il y auroit pour le vuide qui doit se trouver entre les pieds de deux dents voisines seroit si peu de chose, qu'il ne suffiroit pas pour recevoir l'aîle du pignon, à moins qu'on ne la fît excessivement maigre; & dans le cas même où cette aîle pourroit être faite aussi mince qu'on le voudroit, il n'y auroit point assez de place entre les dents pour le jeu de l'engrenage. On peut donc conclurre qu'une roue de tant de dents qu'on voudra n'est pas propre à conduire un pignon de 7, en ne poussant ses aîles

qu'après la ligne des centres. Ainſi lorſqu'on aura un pignon de 7 à faire mener par une roue, il faudra que ſes aîles ſoient pouſſées par les dents de la roue en partie avant & en partie après la ligne des centres, comme on le voit dans la figure 188. Fig. 188.

I I.

Pour les Pignons de 8 aîles.

551. *Une roue de 57 dents, & même celle d'un plus grand nombre de dents, n'eſt pas propre à conduire uniformément un pignon de 8, en pouſſant ſes aîles uniquement après la ligne des centres.* Fig. 189.

Pour que les aîles du pignon de 8 ne ſoient pouſſées qu'après la ligne des centres, la dent *CEG* ne doit point quitter l'aîle *HK*, que le flanc droit *AN* de l'aîle ſuivante ne ſoit dans la ligne des centres; & comme un vuide & le plein d'une aîle doivent occuper un angle de 45 degrés dans le pignon de 8, l'angle *FBH* ou *FBE* ſera de 45°. Ainſi en ſuppoſant que le rayon primitif *AB* du pignon ſoit de 8 parties, & réſolvant le triangle rectangle iſoſcèle *ABE*, on trouvera *BE* de 5, 657 parties.

Si l'on ſuppoſe la roue de 57 dents, ſon rayon primitif *AF* ſera de 57 parties, & *BF* ſera de 65 parties. Ainſi l'on connoîtra dans le triangle *EBF* les deux côtés *BE*, *BF* avec l'angle *EBF* qu'ils comprennent; & réſolvant ce triangle, on trouvera l'angle *EFB* ou *EFA* de 3° 45′ 7″.

L'angle *BFC* qui contient le plein d'une dent & un vuide, étant de 6° 18′ 57″ à peu de choſe près, parce qu'on ſuppoſe la roue de 57 dents; l'angle

CFE sera de 2° 33′ 50″. Et comme les deux épicycloïdes qui renfermeront la dent *CEG* seront égales, l'angle *CFG* qui comprendra le plein de cette dent sera de 5° 7′ 40″ ; & par conséquent l'angle *AFG* du vuide qui se trouvera entre les pieds de deux dents voisines ne sera que de 1° 11′ 17″.

Or l'angle *AFG* de ce vuide n'étant pas assez grand pour recevoir une aîle d'une épaisseur raisonnable, avec un jeu convenable à un bon engrenage, on doit conclurre qu'une roue de 57 dents n'est pas propre à conduire un pignon de 8 en poussant les flancs de ses aîles uniquement après la ligne des centres. Et comme une roue d'un plus grand nombre de dents n'auroit pas un vuide beaucoup plus grand entre ses dents, comme il est aisé de le prouver par un calcul semblable à celui qu'on vient de faire, elle ne seroit guères plus propre à conduire un pignon de 8 en poussant ses aîles après la ligne des centres seulement.

Fig. 190. Ainsi lorsqu'on aura un pignon de 8 à faire conduire uniformément par une roue de tant de dents qu'on voudra, il faudra faire pousser ses aîles par les dents de la roue, tantôt avant & tantôt après la ligne des centres, comme on le voit dans la figure 190.

III.

Pour les Pignons de 9 aîles.

Fig. 191. 552. *Si l'on vouloit faire conduire uniformément un pignon de 9 par une roue de 64 dents, ou par une roue d'un plus grand nombre de dents, en poussant ses aîles uniquement après la ligne des centres, ses aîles deviendroient un peu trop foibles.*

Au moment que la dent *CEG* cessera de conduire l'aîle *HK*, & que le flanc *AN* de l'aîle suivante sera dans la ligne des centres, l'angle *HBF* sera de 40 degrés. Ainsi en supposant que le rayon primitif du pignon de 9 aîles sera de 9 parties, & résolvant le triangle rectangle *ABE*, on trouvera *BE* de 6, 8944 parties.

Supposant la roue de 64 dents, son rayon primitif *AF* sera de 64 parties, & la distance *BF* des centres sera de 73 parties. Ainsi l'on connoîtra dans le triangle *EBF* les deux côtés *BE*, *BF* avec l'angle qu'ils comprennent; & résolvant ce triangle, on trouvera l'angle *BFE* ou *AFE* de 3° 44′ 39″.

La roue ayant 64 dents & 64 vuides, l'angle *AFC* qui contiendra une dent & un vuide, sera de 5° 37′ 30″; & si l'on en retranche l'angle *AFE* qu'on a trouvé de 3° 44′ 39″, il restera 1° 52′ 51″ pour la valeur de l'angle *CFE*; & par conséquent l'angle *CFG* sera de 3° 45′ 42″.

Enfin si l'on retranche l'angle *CFG* de l'angle *AFC*, il restera 1° 51′ 48″ pour l'angle *AFG* du vuide qui sera entre deux dents de la roue. Or cet angle n'étant guères plus grand que la moitié de celui *CFG* qui contient le plein d'une dent, & le jeu de l'engrenage devant être pris sur cet angle *AFG*, il en resteroit trop peu pour loger l'aîle du pignon; ainsi les aîles du pignon deviendroient trop foibles.

Comme une roue d'un plus grand nombre de dents, qui conduiroit un pignon de 9, en poussant ses aîles uniquement après la ligne des centres, n'auroit pas entre ses dents des vuides sensiblement plus grands que ceux qu'on vient de trouver pour une roue de 64; on doit conclurre qu'un pignon de

Fig. 191. 9 aîles a besoin d'être poussé en partie avant & en plus grande partie après la ligne des centres, pour être conduit uniformément, comme on le voit dans la figure 192.

I V.

Pour les Pignons de 10 aîles.

Fig. 193. 553. *Un pignon de 10 aîles peut être conduit uniformement par une roue de 72 dents, en poussant les flancs de ses aîles uniquement après la ligne des centres, pourvû qu'on fasse ce pignon un peu plus vuide que plein.*

Lorsque la dent *CEG* quittera l'aîle *HK*, & que le flanc *AN* de l'aîle suivante sera dans la ligne des centres, l'angle *HBF* sera de 36 degrés; or supposant que le rayon primitif *AB* du pignon de 10 aîles sera de 10 parties, on trouvera *BE* de 8, 0902 parties.

La roue étant supposée de 72 dents, son rayon primitif *AF* sera de 72 parties, & la distance *BF* des centres sera de 82 parties. On connoîtra donc dans le triangle *EBF* les deux côtés *BF*, *BE* avec l'angle qu'ils renferment; & résolvant ce triangle, on trouvera son angle *BFE* de $3^{\circ}\ 36'\ 22''$.

La roue ayant 72 dents pleines & 72 vuides, l'angle *BFC* qui contiendra un plein & un vuide sera de 5 degrés; ainsi l'angle *CFE* sera de $1^{\circ}\ 23'\ 38''$, & l'angle *CFG* sera par conséquent de $2^{\circ}\ 47'\ 16''$.

Enfin si l'on retranche l'angle *CFG* de l'angle *BFC*, il restera $2^{\circ}\ 12'\ 44''$ pour l'angle *AFG* du vuide qui sera entre deux dents. Et comme cet angle est presque égal à celui *CFG* qui comprend une dent, il est assez grand pour recevoir une aîle raisonnablement forte avec un jeu convenable. Ainsi une

roue de 72 dents peut conduire uniformément un pignon de 10, en poussant les flancs de ses aîles après la ligne des centres seulement, pourvû qu'on fasse le pignon un peu plus vuide que plein.

On doit pourtant remarquer que la roue de 72 devant être un peu plus pleine que vuide pour conduire un pignon de 10 aîles; si l'on vouloit faire une roue de même nombre autant vuide que pleine, comme c'est l'usage, il faudroit nécessairement que les aîles du pignon de 10 dans lequel cette roue engrèneroit, fussent prises par les dents de la roue un peu avant la ligne des centres, comme dans la figure 194. Fig. 194.

REMARQUE.

554. Dans toutes les roues dont on vient d'examiner l'engrenage avec les pignons de 7, de 8, de 9 & de 10 aîles, la droite *FE* menée du centre de la roue au point *E* où la dent abandonne l'aîle du pignon, divise la dent de la roue en deux parties égales & semblables. Ainsi les dents de ces roues sont pointues; mais on ne peut pas faire autrement dans ces rouages, lorsqu'on veut que le pignon soit mené uniformément, & que ses aîles soient poussées après la ligne des centres. Fig. 187, 189, 191 & 193.

Si le pignon avoit un plus grand nombre d'aîles comme 11 ou 12, on pourroit tracer d'abord la dent un peu plus longue qu'il n'est nécessaire pour conduire l'aîle *HK* au delà de la ligne des centres, jusqu'à ce que le flanc *AN* de l'aîle suivante soit arrivé dans cette ligne; ensuite on pourroit rogner la dent de toute la quantité qui excéderoit la longueur qui lui est nécessaire pour conduire le pignon, comme on

vient de dire ; ou bien l'on pourroit terminer cette dent par un arc de cercle qui toucheroit les deux épicycloïdes de la dent, comme on va l'expliquer pour les dents des roues qui doivent conduire les pignons en poussant leurs aîles en partie avant & en partie après la ligne des centres.

Lorsque les aîles d'un pignon peuvent être poussées uniquement après la ligne des centres, on doit remarquer que ses aîles n'ont pas besoin d'être prolongées au delà de sa circonférence primitive, & que le diamètre vrai peut être égal au primitif. Mais comme les angles qui termineroient les flancs des aîles, pourroient gratter les dents des roues & causer des arrêts dans la machine ; on est obligé de tenir le diamètre vrai du pignon plus grand que son diamètre primitif d'une quantité à peu près égale à l'épaisseur des aîles ; & l'on arrondit les extrémités des aîles en demi-cylindre, afin que si quelque dent venoit à prendre une aîle avant la ligne des centres, elle pût glisser sur l'arrondissement de cette aîle.

Fig. 171. 555. Dans le cas où les aîles du pignon sont en trop petit nombre pour être poussées uniquement après la ligne des centres ; lorsqu'on a tracé toutes les épicycloïdes qui renferment les dents de la roue, & toutes celles qui terminent les aîles du pignon, l'on émousse d'abord légèrement toutes les dents de la roue, en les terminant comme la dent *CPA*, soit par un petit arc *Ee* concentrique à la roue, soit par un arc qui touche les deux épicycloïdes opposées de la dent en deux points *E*, *e* fort près de la pointe.

Chaque dent telle que *CPA* de la roue étant ainsi émoussée, l'on mène à l'extrémité *E* de l'une de ses

épicycloïdes une perpendiculaire *EA* qui rencontre la circonférence primitive de cette roue en quelque point *A* qui peut être différent du pied de l'autre épicycloïde. Puis ayant placé ce point *A* dans la ligne des centres, & mené une perpendiculaire *AM* au flanc *Ll* de la dent suivante, on peut émousser chaque aîle telle que *Omo* du pignon par un arc *Mn* concentrique au pignon, ou par quelque autre arc qui touche les deux épicycloïdes de cette aîle aux deux points *M*, *n*. Or en émoussant ainsi les aîles du pignon, la droite *BM* est le plus petit rayon vrai qu'on puisse donner au pignon.

Avertissement.

556. Quoique les règles qu'on vient d'exposer pour former les dents des roues, soit qu'elles conduisent des lanternes ou qu'elles mènent des pignons, & celles qu'on a données pour les fuseaux des lanternes & pour tracer les aîles des pignons, ne puissent être mises en pratique que dans le cas où les dents seront de la même grosseur ou plus grosses que celles qu'on a dessinées dans les figures de ce Livre, elles ne seront point inutiles aux Artistes qui auront des dentures beaucoup plus fines à former ; parce que lorsqu'ils auront devant les yeux la figure d'une grosse dent semblable à celles qu'ils doivent faire en petit, il leur sera aisé de l'imiter à la vûe simple.

Comme on ne peut pas espérer de former les dentures avec toute l'égalité & la précision qui sont nécessaires pour que les circonférences primitives de la roue & du pignon ou de la lanterne, tournent toûjours avec la même force & la même vitesse ; que l'inégalité & les autres défauts de la denture seroient

cause que quelques dents ne conduiroient pas aussi loin qu'il le faudroit après la ligne des centres, les aîles ou les fuseaux qu'elles doivent pousser, & qu'il en pourroit résulter des arboutemens des aîles ou des fuseaux contre les flancs des dents qui prendroient ces aîles ou ces fuseaux trop tôt avant la ligne des centres; les Artistes préviennent cet inconvénient, en faisant le diamètre primitif de la roue un peu plus grand qu'il ne doit être relativement à celui de la lanterne ou du pignon.

Au moyen de cet agrandissement du diamètre de la roue, qui doit être proportionné aux défauts que l'on peut craindre dans la denture, la dent qui suit celle qui pousse le fuseau ou l'aîle après la ligne des centres, prend un peu plus tard le fuseau ou l'aîle qui suit; & lorsque la dent précédente a poussé le fuseau ou l'aîle après la ligne des centres aussi loin qu'elle le peut faire uniformément, la roue prend un peu plus de vîtesse qu'elle n'en communique à la lanterne ou au pignon, ce qui est un défaut : mais ce défaut dans lequel on tombe volontairement, est moins à craindre que les arboutemens auxquels on seroit exposé si on vouloit l'éviter.

Il est évident que ce qu'on vient de dire au sujet de l'agrandissement du diamètre de la roue au delà de ce qui est nécessaire pour conduire uniformément la lanterne ou le pignon, suppose que ce sera la roue qui conduira la lanterne ou le pignon; mais lorsque la roue sera conduite par un pignon, il est clair que pour éviter les arboutemens, ce sera le diamètre primitif du pignon qu'il faudra rendre un peu plus grand qu'il ne faut pour conduire la roue uniformément.

Comme les dents d'une roue doivent pousser les

fuſeaux d'une lanterne en les éloignant de la ligne des centres, & qu'il n'y a point d'arboutemens à craindre dans cette façon de conduire une lanterne; on peut ſans aucun inconvénient faire mener une lanterne par une roue. Mais comme les fuſeaux d'une lanterne doivent au contraire pouſſer les dents d'une roue en les rapprochant de la ligne des centres, & qu'il peut arriver des arboutemens dans cette manière de conduire une roue, on en doit conclurre qu'il faut préférer un pignon à une lanterne, lorſqu'on a une roue à faire conduire.

Juſqu'ici il n'a été queſtion que des roues plates dont les axes ſont toûjours parallèles à ceux des lanternes ou des pignons qui engrènent avec elles : on va maintenant parler des roues en couronne appelées communément Roues de chan, *dont les axes ſont ordinairement perpendiculaires, & peuvent être plus ou moins inclinés à ceux de leurs lanternes ou de leurs pignons; & l'on fera voir que les lanternes & les pignons qui engrènent avec ces eſpèces de roues doivent être coniques.*

DÉFINITIONS.

557. Soit un cone droit *CAPBQT* dont le ſommet C demeure immobile : ſi l'on fait rouler la baſe *APBQT* de ce cone ſur un plan *RES* placé comme on voudra par rapport au point *C*, & qu'on imagine un ſtyle ou traçoir ſitué au point *A* de la circonférence du cercle roulant; ce ſtyle *A* décrira pendant ce mouvement une courbe *AMGF* qu'on appelle *Épicycloïde ſphérique.* Fig. 195.

Le ſtyle A *arrêté à la circonférence de la baſe du cone étant toûjours à la même diſtance du point fixe* C *où*

demeure le sommet du cone; tous les points de la courbe AMGF, *tracée par ce style* A; *seront également éloignés du même point* C, *& seront par conséquent sur la surface d'une sphère qui aura ce point* C *pour centre. Ainsi la courbe* AMGF *peut être nommée* sphérique: *& comme elle est du genre des épicycloïdes, parce qu'elle est formée par le roulement d'un cercle* APBQT *sur la circonférence d'un autre cercle* RES, *on a pû la nommer* Épicycloïde sphérique.

Le cercle *APBQT* qui en roulant décrit l'épicycloïde sphérique, se nomme *Cercle générateur* de cette courbe; & la partie *RES* de la circonférence, sur laquelle il roule, s'appelle la base de cette épicycloïde.

Si le point *C* auquel le sommet du cone est arrêté est au centre du cercle *RES* sur lequel on fait rouler sa base, toute la surface convexe de ce cone roulera sur le plan de ce cercle. Mais si le sommet *C* du cone n'est point dans le plan *RES*, la surface convexe du cone *CAPBQT* s'appuiera toûjours sur la surface convexe ou concave d'un autre cone droit *CRAEFS*, suivant que le point *C* se trouvera au dessus ou au dessous du cercle sur lequel on fera rouler la base du cone mobile. Et comme le plan d'un cercle peut être pris pour un cone infiniment obtus, on peut dire qu'*une épicycloïde sphérique* AMGF *est engendrée par un style* A *attaché à la surface convexe d'un cone droit, dont le sommet* C *est arrêté avec celui d'un autre cone droit, & qui roule sur la surface courbe de ce second cone.*

Fig. 196. Ainsi pendant que le point *A* commun à la surface convexe & à la base du cone roulant, tracera une épicycloïde *AMGF*, un autre point quelconque *a*

de la surface convexe du même cone, tracera une autre épicycloïde sphérique *amgf* sur la surface d'une sphère qui aura *aC* pour rayon; en sorte qu'une partie quelconque *Aa* d'un côté *AC* du cone roulant, engendrera la surface convexe du tronc d'une espèce de cone, terminée par deux épicycloïdes *AMGF*, *amgf* parallèles & semblables.

COROLLAIRE I.

558. Comme la base *APBQT* du cone roulant applique successivement toutes les parties de sa circonférence sur celles de sa base *AEF*, cette base *AEF* doit nécessairement être de même longueur que la circonférence du cercle *APBQT*, & chaque portion telle que *AD* ou *AE* de la même base doit aussi être égale à chaque partie *DM* ou *ELG* de la circonférence, qui a roulé sur elle. Fig. 194.

Ainsi lorsque la sphère sur laquelle l'épicycloïde sphérique doit être tracée, sera donnée, & que l'on connoîtra la grandeur & la position du cone roulant qui doit engendrer cette épicycloïde; il sera aisé de trouver tant de points qu'on voudra de cette courbe. Car si l'on décrit autant de cercles *MDN*, *GLE*, &c. égaux à la base du cone roulant, qu'on veut avoir de points de l'épicycloïde, & que l'on prenne sur les circonférences de ces cercles, à commencer des points *D*, *E*, &c. où ils toucheront la base, des arcs *DM*, *ELG*, &c. égaux aux arcs *AD*, *AE*, &c. de cette base, compris entre l'origine *C* de l'épicycloïde & les points d'attouchement *D*, *E*, &c; les points *M*, *G*, &c. appartiendront à l'épicycloïde sphérique, & la courbe qu'on fera passer par tous ces points sera l'épicycloïde sphérique elle-même.

Fig. 196. Si l'on vouloit tracer l'épicycloïde sphérique *amgf* qui doit être décrite par le point *a* pendant que l'épicycloïde *AMGF* est décrite par le point *A*; il faudroit prendre une autre sphère qui eût *aC* pour rayon : & après qu'on auroit tracé sur la surface de cette sphère une portion *aef* de cercle placé à l'égard de cette sphère, comme le premier cercle *AEF* l'est à l'égard de la première sphère, on prendroit cet arc *aef* pour la base de la nouvelle épicycloïde sphérique. Enfin ayant mené dans le cone roulant un diamètre *at* parallèle au plan de sa base, on prendroit le cercle qui auroit ce diamètre *at*, pour le générateur de l'épicycloïde qu'on demande. La base & le cercle générateur de l'épicycloïde qu'on doit décrire étant trouvés, on cherchera, comme il vient d'être expliqué, tant de points qu'on voudra de cette épicycloïde.

Corollaire II.

Fig. 196. 559. Si l'axe *CK* du cone *CAPBQT* demeuroit immobile, & si en faisant tourner le cone sphérique *CRES* sur son axe, sa surface entraînoit celle du cone *CAPBQT* par leur attouchement; il est évident que toutes les parties de la circonférence *APBQT* s'appliqueroient successivement sur celles de l'arc *AEF*, & que les points *A*, *a* de la surface convexe de ce cone, traceroient sur les surfaces de deux sphères concentriques les deux épicycloïdes sphériques *AMGF*, *amgf* dont la construction vient d'être expliquée : en sorte que la portion *Aa* du côté du même cone engendreroit la surface convexe du tronc d'une espèce de cone contenu entre ces deux épicycloïdes semblables & parallèles.

Il suit de là que si l'on taille dans une portion de sphère

sphère creuse, une portion de tronc de cone dont la surface convexe soit terminée par les deux épicycloïdes *AMGF*, *amgf* qu'on vient de construire; cette portion de tronc de cone épicycloïdal conduira le cone *CAPBQT*, en le poussant par la portion *Aa* de son côté, de la même manière que le conduiroit le cone sphérique *CRES* en lui communiquant son mouvement par le seul attouchement, ou par un engrénage infiniment petit.

Or le cone sphérique *CRES*, en entraînant le cone *CAPBQT* par le simple attouchement, lui communiqueroit toute sa vîtesse, & par conséquent toute sa force.

Donc la portion de tronc de cone épicycloïdal, en poussant par sa surface convexe la partie *Aa* du côté *AC* du cone, communiquera à la surface de ce cone toute sa vîtesse, & par conséquent toute sa force; ainsi la base *APBQT* de ce cone tournera avec la même vîtesse & la même force que le cercle *RES* de la sphère.

Comme il est essentiel à la perfection d'un rouage, qu'une pièce qui en conduit une autre lui communique toute la vîtesse qu'elle a elle-même; ce sera principalement de ce Corollaire qu'on déduira la meilleure figure qu'on peut donner aux dents d'une roue de chan ou en couronne qui doit conduire une lanterne. Une portion AMma *de la surface convexe du tronc épicycloïdal taillé dans la sphère creuse, représentera le côté d'une dent de la roue, & la partie* Aa *du côté* AC *du cone représentera un fuseau infiniment délié de la lanterne. Et comme tous les autres fuseaux seront disposés de même que le fuseau* Aa *par rapport à l'axe* CK *du cone, tous les fuseaux* Fig. 196.

de la lanterne seront distribués sur la surface convexe d'un tronc de cone dont le sommet sera au centre C de la sphère creuse où les dents de la roue seront taillées.

PROBLEME.

Fig. 196 & 200. 560. *Le nombre des dents d'une roue de chan, & celui des fuseaux d'une lanterne avec laquelle elle doit engréner, étant donnés, avec la position de l'axe de la lanterne par rapport à celui de la roue, & le diamètre du cercle* RES *qui doit passer par les naissances des arrondissemens extérieurs de toutes les dents; tracer les dents de la roue, & trouver la grandeur & la figure de la lanterne.*

Solution.

Fig. 197, 198 & 199. On tirera une droite *RS* égale au diamètre du cercle qui doit passer par les naissances des arrondissemens extérieurs de toutes les dents de la roue, on la coupera en deux parties égales par une perpendiculaire *XY* qui représentera l'axe de la roue. Puis ayant mené par une extrémité de la ligne *RS*, une droite *RT* qui fasse avec *RS* un angle *TRS* égal à l'angle *KCX* que l'axe de la lanterne doit faire avec celui de la roue, on fera cette droite *RT* de telle grandeur que l'on ait *RS* à *RT*, comme le nombre des dents de la roue est au nombre des fuseaux de la lanterne; & cette ligne *RT*, qu'on nommera dans la suite *Diamètre principal* de la lanterne, sera celui que la lanterne aura à l'endroit où ses fuseaux seront rencontrés par les faces extérieures des dents de la roue.

Ensuite ayant tiré sur le milieu de la droite *RT* une perpendiculaire *KC* jusqu'à l'axe de la roue, cette perpendiculaire sera l'axe de la lanterne qu'on

sera conique, & le point C où cet axe rencontrera celui de la roue, sera le sommet de cette lanterne: en sorte que les droites indéfinies CRG, CTF qu'on mènera par ce point C & par les extrémités du diamètre principal RT, seront les directions des axes des fuseaux de la lanterne.

Le même point C où l'axe de la lanterne rencontrera celui de la roue, sera le centre d'une zone ou ceinture sphérique qu'on fera de telle épaisseur qu'on voudra pour y tailler les dents de la roue. Donc si du point C comme centre & du rayon CR, on décrit un arc ARD dont une partie AR soit un peu plus grande que la hauteur qu'on juge pouvoir donner aux dents de la roue, & l'autre partie RD soit égale au chan de cette roue sans y comprendre ses dents; & si l'on fait tourner cet arc ARD autour de la droite XY comme axe; on formera une zone sphérique $ADEB$ dont la partie supérieure $ARSB$ servira pour former les faces extérieures des dents de la roue, & la partie inférieure $RDES$ sera le chan qui portera ces dents; en sorte que la circonférence du cercle qui aura RS pour diamètre, passera par les naissances des courbes extérieures de toutes les dents.

Ayant tiré par les extrémités de l'arc AR les deux rayons CA, CR, & ayant pris sur l'un d'eux une partie Aa égale à l'épaisseur qu'on veut donner aux dents de la roue; du point C comme centre on décrira l'arc ar entre ces mêmes rayons; & faisant tourner cet arc autour de l'axe XY de la roue, on formera une zone sphérique $arsb$ sur laquelle il faudra tracer les faces intérieures de toutes les dents dont les courbures partiront de la circonférence qui

aura *rs* pour diamètre, & qui sera décrite par le mouvement du point *r*.

Les deux zones extérieure *ARSB* & intérieure *arsb* des dents de la roue étant déterminées, avec la grandeur & la position du diamètre principal *RT* de la lanterne; on mènera parallèlement à ce diamètre deux droites *FG*, *HI* dont la distance de l'une à l'autre soit égale à celle qu'on veut mettre entre les deux plateaux de la lanterne, & qui soient à peu près également éloignées des deux zones extérieure & intérieure des dents : & ces deux droites *FG*, *HI* terminées par les deux droites *CRG*, *CTF*, représenteront les diamètres des deux circonférences qu'il faudra tracer sur les deux tourteaux opposés de la lanterne, par les centres des fuseaux qui doivent être coniques, & dont les sommets se réuniront avec celui de la lanterne au centre *C* des deux surfaces sphériques de la ceinture dans laquelle il faudra tailler les dents de la roue.

Toutes les dimensions de la lanterne étant déterminées, & une partie de la ceinture sphérique dans laquelle il faut prendre les dents, étant formée en plâtre ou de quelque autre matière assez solide pour qu'on y puisse prendre des mesures, on n'aura plus qu'à décrire sur les surfaces opposées de cette ceinture, les faces extérieure & intérieure d'une dent, afin d'avoir un modèle pour tracer toutes les autres.

Comme la description des courbes des faces opposées d'une dent de roue dépendra de la grosseur qu'on voudra donner aux fuseaux de la lanterne, & que la courbure des dents qui mèneront des fuseaux coniques d'un diamètre fini, ne peut être déterminée que par des corrections faites à la figure

des dents propres à mener des fuseaux infiniment déliés, l'ordre demande qu'on partage le reste de la solution en deux parties. Dans la premiere, on enseignera à tracer des dents de roue pour des fuseaux infiniment déliés; & dans la seconde, on expliquera les corrections qu'on doit faire à ces premières dents, pour les mettre en état de conduire uniformément des fuseaux coniques dont les sommets se réuniront au centre *C* de la ceinture sphérique où l'on formera les dents.

I.

Pour les dents d'une roue de chan, lorsque les fuseaux de la lanterne sont infiniment déliés.

561. On a démontré (*n*°. 559) que si une ceinture de sphère creuse est taillée en forme de tronc dont la surface convexe *AGFfga* soit terminée par deux épicycloïdes sphériques *AMGF*, *amgf* engendrées par deux points *A*, *a* du même côté d'un cone *CAPBQT*, pendant le roulement de ce cone sur la surface convexe d'un autre cone *CRAEFS*, la surface convexe de ce tronc en poussant la portion *Aa* du côté du cone *CAPBQT*, communiquera à la circonférence de la base de ce cone toute la vîtesse de la circonférence du cercle *RAEFS*. Et comme la portion *Aa* du côté du cone *CAPBQT* peut être prise pour un fuseau infiniment délié d'une lanterne qui auroit les mêmes dimensions que ce cone, & que ce fuseau *Aa* est dirigé vers le centre *C* de la portion de la ceinture sphérique qui le conduit; on doit conclurre qu'une dent *AMNnma* de roue, dont le côté *AMma* Fig. 196.

est une portion de la surface convexe du tronc épicycloïdal dont on vient de parler, est la plus parfaite pour conduire un fuseau de lanterne infiniment délié, & que ce fuseau doit être dirigé vers le centre *C* de la ceinture sphérique où les dents de la roue sont taillées. *C. Q. F. T.*

Comme il est en quelque façon nécessaire, ou du moins très-utile, que les dents de la roue puissent conduire la lanterne en sens contraires; il est évident que chaque dent telle que *AMNnma* doit avoir les deux côtés opposés *AMma*, *NMmn* égaux, semblables, & semblablement placés, & que cette dent doit être assez longue pour conduire le fuseau *Aa* au delà du plan qui passe par les axes de la roue & de la lanterne, jusqu'à ce qu'un autre fuseau soit arrivé dans le même plan pour être conduit à son tour par une autre dent de la roue.

Les autres remarques qu'on pourroit faire sur la figure, la longueur, & la façon de mener des dents d'une roue de chan qui doit conduire une lanterne à fuseaux infiniment déliés, & sur l'espace vuide qu'on doit laisser entre les dents pour le jeu de l'engrénage, étant semblables à celles qu'on a faites au n°. 545, au sujet des roues plates qui mènent des lanternes à fuseaux de même espèce; l'exposition qu'on en feroit ici ne seroit qu'une répétition inutile des mêmes principes.

II.

Pour les Dents d'une roue de chan qui conduit une lanterne à fuseaux coniques d'un diamètre fini.

Fig. 299. 562. On tracera d'abord les dents de la roue;

comme si elle avoit à conduire une lanterne à fuseaux infiniment déliés, en observant de laisser, pour le jeu de l'engrénage, de petits espaces vuides entre les pieds de toutes les dents.

Ensuite ayant fait une lanterne à fuseaux coniques dont tous les sommets se réunissent au centre *C* de la ceinture sphérique dans laquelle on a taillé les dents épicycloïdales, on marquera sur la surface extérieure de cette ceinture le diamètre qu'un fuseau aura à l'endroit *A* qui répondra à cette surface; & l'on marquera pareillement sur la surface intérieure de la même ceinture, le diamètre que le même fuseau aura au point *a* où il rencontrera cette surface.

Les diamètres que les fuseaux auront dans les surfaces opposées de la ceinture sphérique dentée, étant marqués sur ces surfaces, on prendra sur ces mêmes surfaces les cordes des moitiés des arcs auxquels ces diamètres répondront. Ces cordes qui ne seront pas sensiblement plus longues que les rayons d'un fuseau, mesurés aux endroits où il sera rencontré par les deux surfaces sphériques de la ceinture, étant prises pour rayons; on décrira sur les faces extérieure & intérieure de chaque dent, le plus qu'on pourra de petits arcs qui auront leurs centres dans les épicycloïdes entre lesquelles ces faces seront renfermées. Puis après avoir fait passer par tous ces petits arcs des courbes telles que *OM*, *VN* qui seront nécessairement parallèles aux épicycloïdes premièrement tracées, & qui formeront les parties courbes des nouvelles dents propres à mener les fuseaux coniques dont on vient de parler; on fera dans le chan de la roue au dessous du cercle primitif *RES*, des enfonçures telles que *VXYZ*, terminées

par des plans qui passeront par l'axe de la roue & par les naissances *V*, *Y* des courbes parallèles aux épicycloïdes.

Les courbes *OM*, *VN* & les flancs droits *OP*, *VX* de chaque nouvelle dent, étant tracés sur les surfaces extérieure & intérieure de la ceinture sphérique, on taillera les dents de manière qu'une ligne droite fixée par son extrémité au centre *C* de la ceinture dentée, étant promenée le long des côtés *POM*, *XVN* de la face extérieure de chaque dent, s'applique exactement sur les surfaces latérales de ces dents; & l'on aura une roue propre à mener la lanterne à fuseaux coniques pour laquelle elle a été construite. *C. Q. F. T.*

Avertissement.

Fig. 200. 563. Quoiqu'on n'ait marqué dans la figure 200, que les épicycloïdes sphériques qui renferment les faces extérieures des premières dents propres à conduire des fuseaux infiniment déliés, & que pour éviter la confusion, l'on ait supprimé celles qui devroient contenir les faces intérieures des mêmes dents; on a cependant tracé toutes les courbes qu'il faut mener parallèlement à ces épicycloïdes pour réformer les premières dents, & les mettre en état de conduire uniformément une lanterne à fuseaux coniques, dont les sommets sont dans l'axe de la roue.

Comme les petits arcs de cercles qui doivent avoir leurs centres dans les épicycloïdes sphériques, & par lesquels il faut mener les courbes parallèles à ces épicycloïdes, auroient pû causer de la confusion, si on les avoit tracés sur les faces de toutes les dents,

on ne les a décrits que pour réformer un seul côté extérieur d'une dent marquée *H*.

Toutes les remarques qu'on pourroit faire sur la manière de terminer les nouvelles dents ou d'émousser leurs pointes, & de les mettre en état de ne pousser les fuseaux qu'après qu'ils ont passé le plan des axes de la roue & de la lanterne, afin d'éviter les frottemens rentrans, étant les mêmes à peu de choses près que celles qu'on a faites au n°. 546, sur les roues plates; ce seroit tomber dans une répétition inutile, que de les rapporter ici.

THÉOREME.

564. *Pendant que la circonférence de la base d'un cone droit* CABT *dont l'axe* CK *demeure immobile, & dont le sommet* C *est dans l'axe* QO *d'un cercle* RES, *est entraînée par la circonférence de ce cercle, & que* (*n°.* 559) *un point* A *de la circonférence de la base de ce cone décrit une épicycloïde sphérique* AGF *sur une zone sphérique* RESXY *qui a pour rayon le côté* CA *de ce cone; si l'on imagine un second cone droit* MAPK *qui touche la circonférence de la base du premier au point* A *où elle est rencontrée par celle du cercle* RES, *& qui soit par conséquent obligé de tourner aussi-bien que le premier cone; si cè nouveau cone a son sommet* M *dans l'axe du cercle* RES, *son axe* ML *parallèle à celui du premier, & que sa base* APK *ait pour diamètre le rayon* AK *de la base de ce premier cone: un style* A *attaché à la circonférence de la base de ce second cone, parcourra le diamètre* AT *de la base du premier, & décrira en même temps une épicycloïde sphérique* AIHE *sur une seconde zone sphérique* RESVZ *qui aura pour rayon le côté* MA *de ce nouveau cone.* Fig. 201.

DÉMONSTRATION.

Une partie de la démonstration de ce Théorème est la même que celle du n°. 538, & l'autre partie est une conséquence de la définition des épicycloïdes sphériques, semblable à celle du n°. 559.

COROLLAIRE I.

Fig. 201. 565. Puisque le style *A* attaché à la circonférence du cercle *APK*, décrit en même temps le diamètre *AT* du cercle *ABT*, & l'épicycloïde sphérique *AIHE* sur une zone *RESVZ* qui a *MA* pour rayon; l'on conçoit aisément que l'épicycloïde sphérique *AIHE* touchera continuellement le diamètre *AT* du cercle *ABT*, pendant que la circonférence de ce cercle sera entraînée par celle du cercle *RES*, & tournera avec la même vitesse qu'elle. Ainsi il est évident qu'au lieu de faire entraîner la circonférence du cercle *ABT* par celle du cercle *RES*, pour lui communiquer toute la vitesse de cette dernière, on pourra faire pousser une partie *AL* du diamètre *AT* par une partie *AI* de l'épicycloïde sphérique *AIHE*.

COROLLAIRE II.

Fig. 201. 566. Si l'on considère le cercle *RES* comme la base d'une cone droit *CRES* dont la surface convexe touche celle du cone *CABT* suivant une droite *CA*, & que l'on imagine ces deux cones coupés parallèlement à leurs bases par des plans *res*, *abt* menés par un même point quelconque *a* de la ligne *CA* commune à leurs surfaces convexes; la circonférence de la section *res* conduira le cone

CABT par la circonférence *abt* de la section, de la même manière que la circonférence *RES* le conduiroit par la circonférence de sa base *ABT*.

Cela posé, si l'on imagine, comme dans le Théorème, un cone droit *mapk* dont la base *apk* ait pour diamètre le rayon *ak* du cercle *abt*, & touche intérieurement au point *a* la circonférence de ce cercle, en sorte que ce nouveau cone conduit par la circonférence *res*, soit obligé de rouler au dedans du cercle *abt*; un style *a* fixé à la circonférence du cercle *apk* parcourra le diamètre *at* du cercle *abt*, & décrira en même temps une épicycloïde sphérique *aihe* sur une zone sphérique *resuz* qui aura pour rayon le côté *ma* de ce nouveau cone.

Ainsi l'épicycloïde sphérique *aihe* touchera continuellement le diamètre *at* du cercle *abt*, pendant que sa circonférence sera conduite par celle du cercle *res*; & par conséquent au lieu de faire mener la circonférence du cercle *abt* par celle du cercle *res*, pour lui donner toute la vîtesse de cette dernière, on pourra faire pousser une partie *al* du diamètre *at* par une partie *ai* de l'épicycloïde sphérique *aihe*.

COROLLAIRE III.

567. Il suit des deux derniers Corollaires, que si l'on taille dans une portion de sphère creuse un tronc *AHEehu* dont la surface convexe soit terminée par les deux épicycloïdes sphériques *AIHE*, *aihe* dont on a parlé dans le Théorème & dans le Corollaire précédent; ce tronc conduira le cone *CABT* en le poussant par un plan *AKka* mené par son axe, comme le conduiroit la circonférence Fig. 201.

du cercle *RES*, ou celle du cercle *res*, en l'entraînant par la circonférence de sa base *ABT*, ou par celle de la section *abt*.

Et comme la circonférence *ABT* de la base du cone recevra toute la vîtesse de la circonférence du cercle *RES*, lorsqu'elle sera conduite par la circonférence de ce cercle, ou que sa section *abt* sera entraînée par celle du cercle *res*; il est évident que la circonférence *ABT* de la base de ce cone recevra toute la vîtesse de la circonférence *RES*, lorsque le tronc compris entre les deux épicycloïdes sphériques *AIHE*, *aihe*, le poussera par un plan *AKka* mené par son axe *CK*.

Fig. 201. 568. *C'est de ce Corollaire qu'on va déduire la construction des roues de chan & des pignons qu'elles doivent conduire. Une portion* AIia *de la surface convexe du tronc épicycloïdal, comprise entre les deux épicycloïdes sphériques* AIHE, aihe, *représentera le côté d'une dent* AINnia *qui peut conduire les aîles d'un pignon après qu'elles sont arrivées dans le plan des axes de la roue & du pignon ; & le plan du trapèze* AKka *terminé par l'axe* CK *& par le côté* CA *du cone* CABT, *représentera le flanc d'une aîle de pignon. Et comme toutes les autres aîles du pignon seront disposées de même que celle* AKka *par rapport à l'axe* CK *du cone, toutes les aîles du pignon seront contenues dans le tronc de cone compris entre les deux cercles* ABT, abt; *en sorte que les flancs & les bouts des aîles seront dirigés vers un point* C *de l'axe de la sphère creuse où les dents de la roue seront taillées.*

PROBLEME.

569. *Le nombre des dents d'une roue de chan & celui des aîles du pignon qui doit engréner avec elle, étant donnés avec la position de l'axe du pignon par rapport à celui de la roue, & le diamètre du cercle* RES *qui doit passer par les naissances des courbures extérieures de toutes les dents; tracer les dents de la roue, & déterminer la grandeur & la figure du pignon.* Fig. 201.

SOLUTION.

On tirera, comme dans la solution du Problème précédent n°. 560, une droite *RES* égale au diamètre du cercle qui doit passer par les naissances des arrondissemens extérieurs de toutes les dents, & on la coupera en deux parties égales par une perpendiculaire *XY* qui représentera l'axe de la roue. Puis ayant mené par une extrémité *R* de cette ligne une droite *RT* qui fasse avec elle un angle *TRE* égal à l'angle *KCX* que l'axe du pignon doit faire avec celui de la roue; on fera la longueur de *RT* telle qu'on ait *RS* à *RT* comme le nombre des dents de la roue, est au nombre des aîles du pignon qui doit engréner avec elle; & cette droite *RT* qu'on peut nommer le *Diamètre principal du pignon*, sera celui que ce pignon aura, sans y comprendre l'arrondissement de ses aîles, à l'endroit où il sera rencontré par les faces extérieures des dents de la roue. Fig. 203 & 204.

Ensuite ayant mené sur le milieu de la droite *RT* une perpendiculaire *KC* jusqu'à l'axe de la roue, cette perpendiculaire sera l'axe du pignon qui doit être conique (*n°.* 568); & le point *C* où cette ligne

rencontrera l'axe de la roue, sera le sommet du cone dans lequel le pignon sera taillé; en sorte que les droites *CRG*, *CTF* qu'on mènera par ce point *C* & par les extrémités du diamètre principal *RT*, feront les directions des bouts des flancs plans des aîles du pignon.

Ayant pris sur *CR* une partie *Rr* égale à l'épaisseur que les dents de la roue doivent avoir aux naissances de leur arrondissemens, on mènera dans l'angle *TCR* une droite *rt* parallèle à *RT*; & les trapèzes *RKkr*, *TKkt* représenteront les flancs plans de deux aîles du pignon. Mais comme il est utile de donner au corps du pignon plus de longueur que n'en doit avoir la partie par laquelle l'aîle peut être poussée, on mènera encore dans l'angle *TCR* parallèlement à *RT*, & à distances à peu près égales des deux droites *RT*, *rt*, deux droites *GF*, *gf*; & l'on prendra le trapèse *FGgf* pour le profil du pignon coupé suivant son axe, quoiqu'il n'y ait que la partie de ce pignon correspondante au trapèze *RTtr* qui puisse être rencontrée par les dents de la roue.

Les deux droites *RT*, *rt* étant divisées en deux parties égales par l'axe *CK* du pignon, & ayant mené sur les milieux de leurs moitiés *KR*, *kr* des perpendiculaires *LM*, *lm* qui rencontreront l'axe de la roue en deux points *M*, *m*; on décrira d'abord du point *M* comme centre, par le point *R*, un arc *KRD* dont la partie *RK* soit un peu plus longue que la hauteur qu'on croit pouvoir donner aux parties courbes des dents de la roue, & l'autre partie *RD* soit égale au chan de cette roue, sans y comprendre les parties arrondies des dents; puis on fera

tourner cet arc *KRD* autour de la droite *XY* comme axe ; & il se formera une zone sphérique *KDEB* dont la partie supérieure *KRSB* servira à former les faces courbes extérieures des dents de la roue, & la partie inférieure *RDES* sera le chan qui portera les dents.

Ensuite du point *m* comme centre, & du rayon *mr*, on décrira un autre arc *krd*; & faisant aussi tourner cet arc autour de la droite *XY* comme axe, on formera une nouvelle zone sphérique *kdeb* sur la partie supérieure de laquelle on tracera les faces intérieures des dents de la roue, dont les courbures doivent partir de la circonférence du cercle décrit par le rayon *re*.

Les dimensions du pignon étant déterminées, & la ceinture sphérique dans laquelle il faut tailler les dents étant formée de quelque matière assez solide pour qu'on y puisse prendre des mesures ; le Problème se réduira à tracer sur les surfaces extérieure & intérieure de cette ceinture, les faces extérieure & intérieure d'une dent, afin d'avoir un modèle pour tracer toutes les autres.

Pour former un côté de la face extérieure d'une dent, on décrira sur la surface de la zone représentée par son profil *RSBK*, une portion d'épicycloïde sphérique qui aura pour cercle générateur la base du cone dont le triangle *KMR* représente le profil, & qui aura pour base la circonférence du cercle décrit par le point *R* dans la révolution de l'arc *KR* autour de l'axe *XY* ; & pour tracer un côté de la face intérieure de la même dent, l'on décrira sur la surface de la zone représentée par son profil *rsbk*, une portion d'épicycloïde sphérique qui aura

pour cercle générateur la base du cone dont le triangle *kmr* est le profil, & pour base la circonférence du cercle dont *rs* est le diamètre.

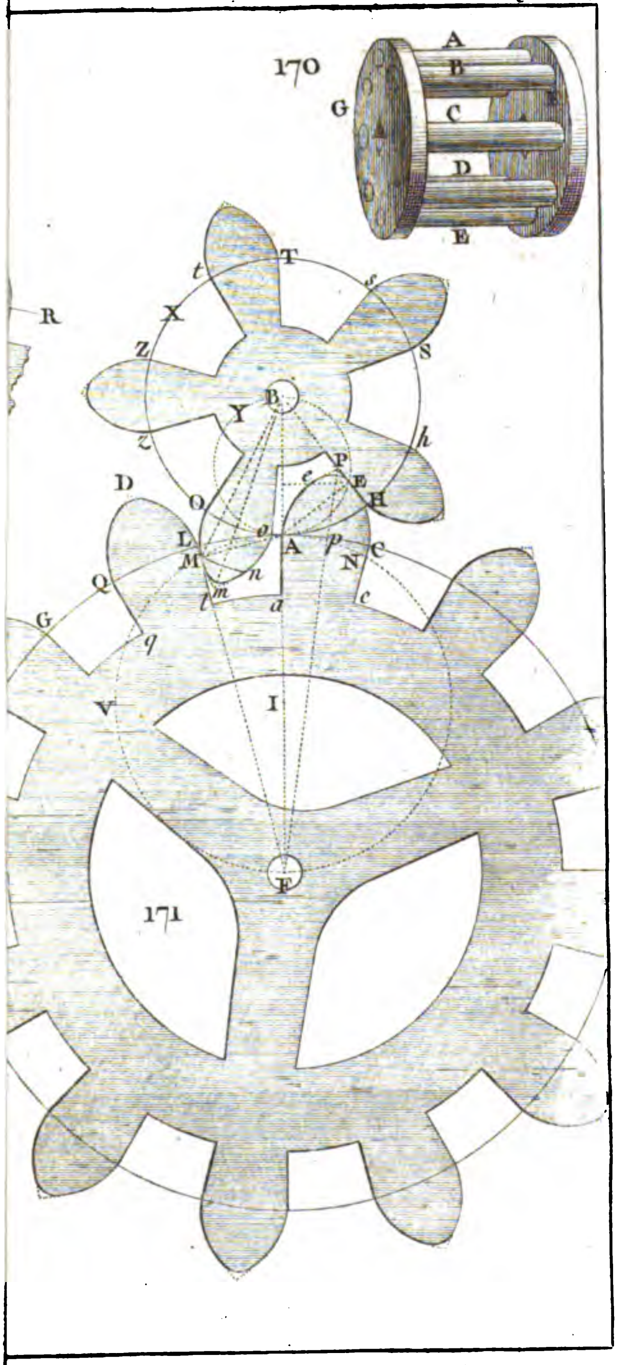
Fig. 201. Les deux droites *Aa*, *Nn* dirigées vers le sommet *C* du cone du pignon, étant les naissances des côtés courbes d'une dent, & les deux portions *AI*, *ai* d'épicycloïde qui doivent border d'un côté les faces extérieure & intérieure de cette dent, étant tracées; on décrira deux autres portions *NI*, *ni* d'épicycloïdes égales & semblables aux deux premières qu'elles rencontreront aux points *I*, *i*: & les espaces *AIN*, *ain* seront les modèles sur lesquels il faudra former les faces extérieure & intérieure de toutes les dents de la roue; ainsi le Problème sera entièrement résolu.

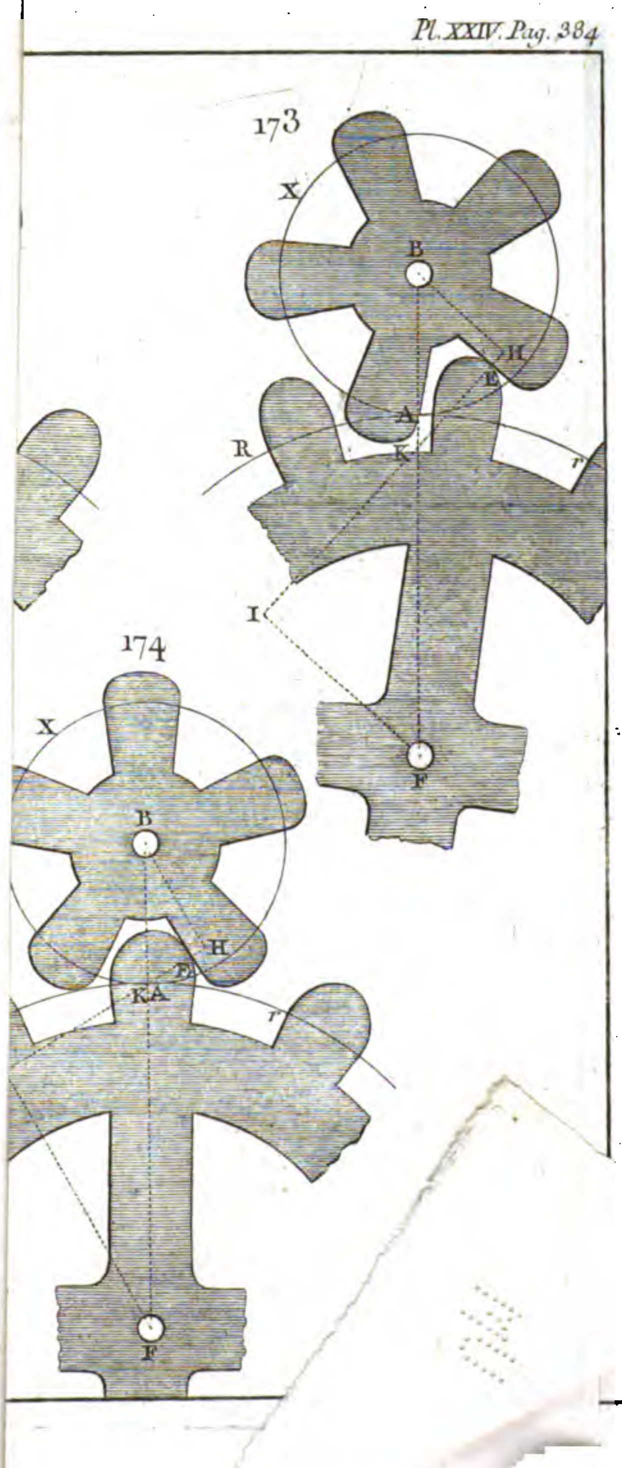
Avertissement.

570. On n'a déterminé dans ce Problème que les parties courbes des dents de la roue, par lesquelles les flancs plans des aîles du pignon doivent être poussés après qu'ils sont arrivés dans le plan des axes de la roue & du pignon; & l'on n'a considéré le cone du pignon que dans le cas où les flancs de ses aîles sont entièrement plans, & ne peuvent être poussés qu'après le plan des axes. Mais pour éviter les arboutemens qui pourroient se faire, si les dents rencontroient quelques aîles avant le plan des axes, on est obligé de tenir le cone du pignon un peu plus gros qu'on ne l'a trouvé.

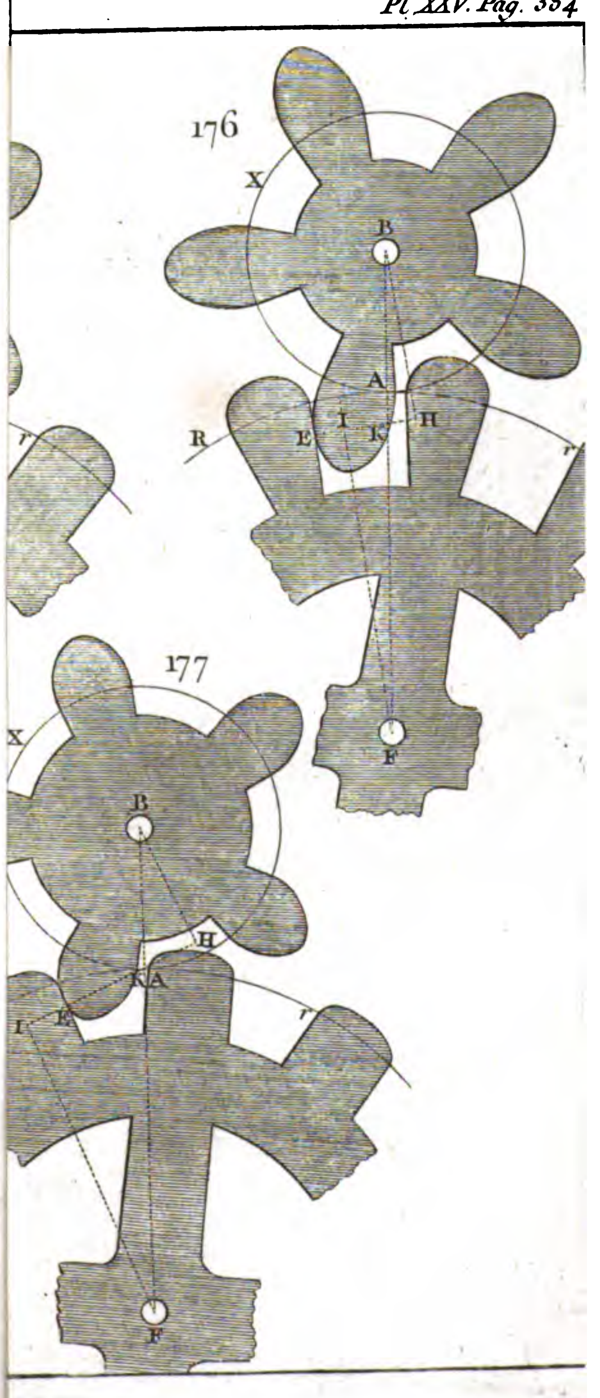
Si l'on grossit le cone du pignon de manière que chaque diamètre soit augmenté d'une quantité égale à l'épaisseur que les aîles auront à l'endroit de ce diamètre, on pourra se contenter d'arrondir en forme de demi-cone toutes les parties dont les aîles

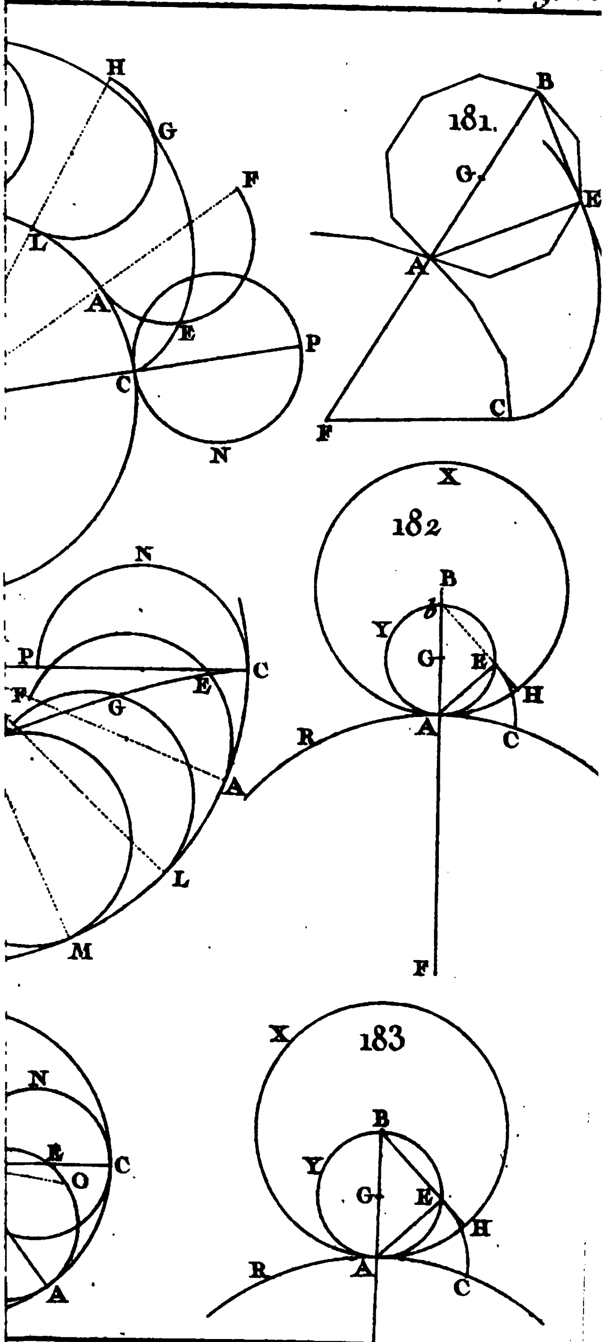
se


170
A
B
C
D
E
G
171
T
t
s
X
R
Z
S
B
Y
z
h
P
e
E
D
O
H
L
o
A
p
C
M
N
n
Q
m
l
a
c
G
q
V
I
F

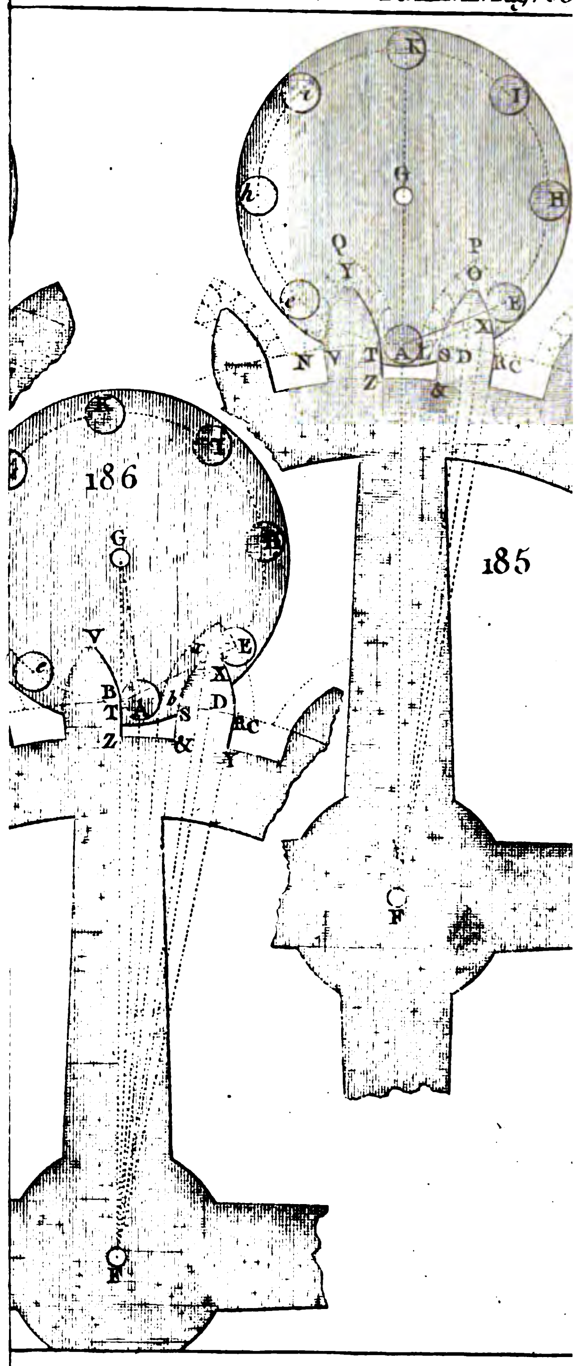


173
X
B
H
E
A
R
K
r
I
F
174
X
B
H
E
KA
r
F

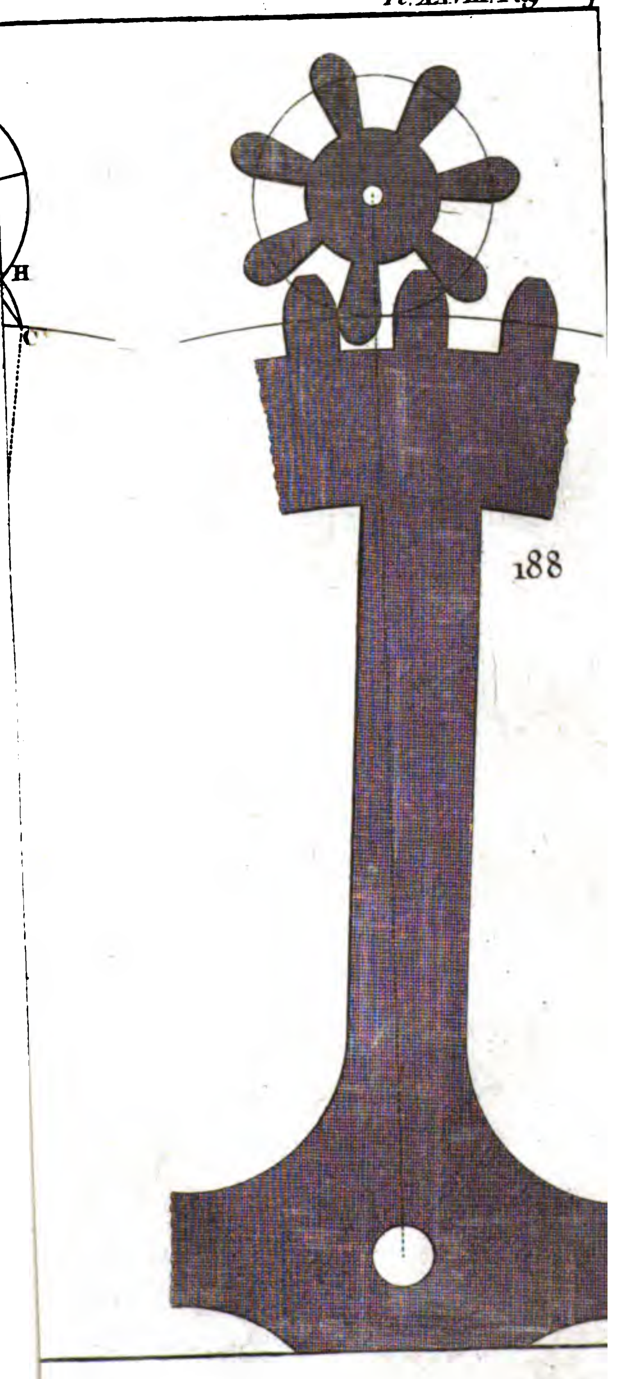

176
X
B
A
I
H
R
E
K
r
r
F
177
X
B
H
K A
I
E
r
F

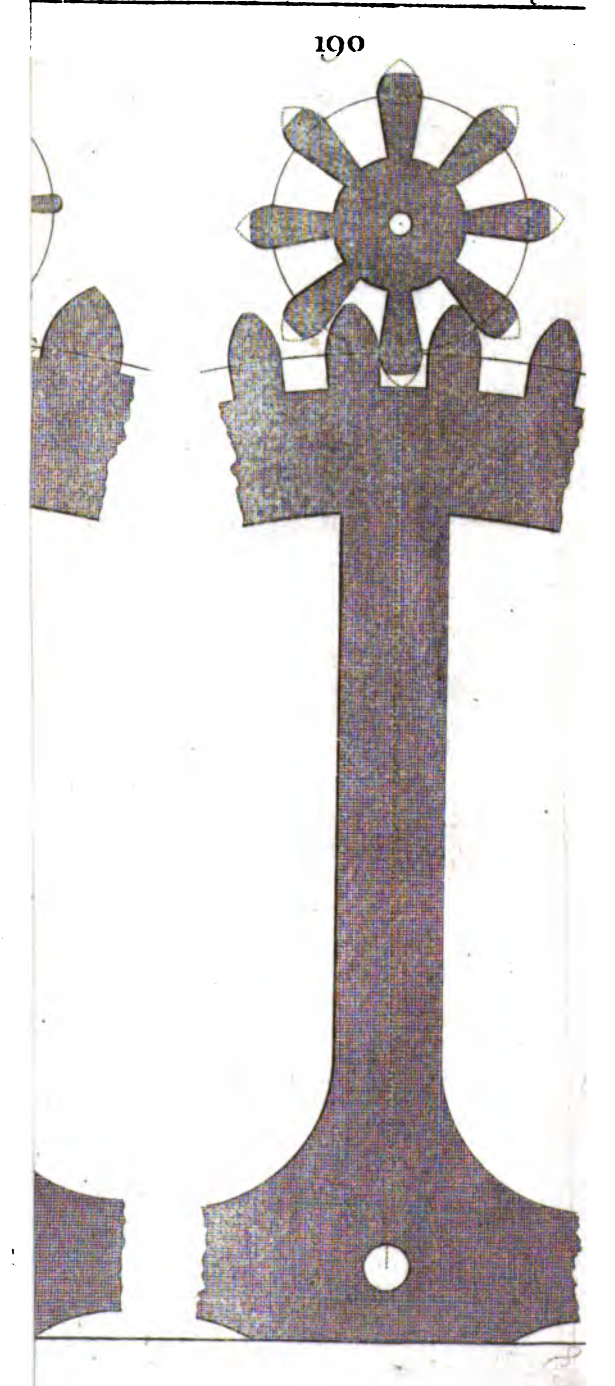


H
G
F
L
A
E
P
C
N
181.
B
G
E
A
C
F
X
182
B
b
Y
G
E
H
A
C
R
F
N
P
C
F
E
G
A
L
M
X
183
N
E
C
O
A
B
Y
G
E
H
R
A
C

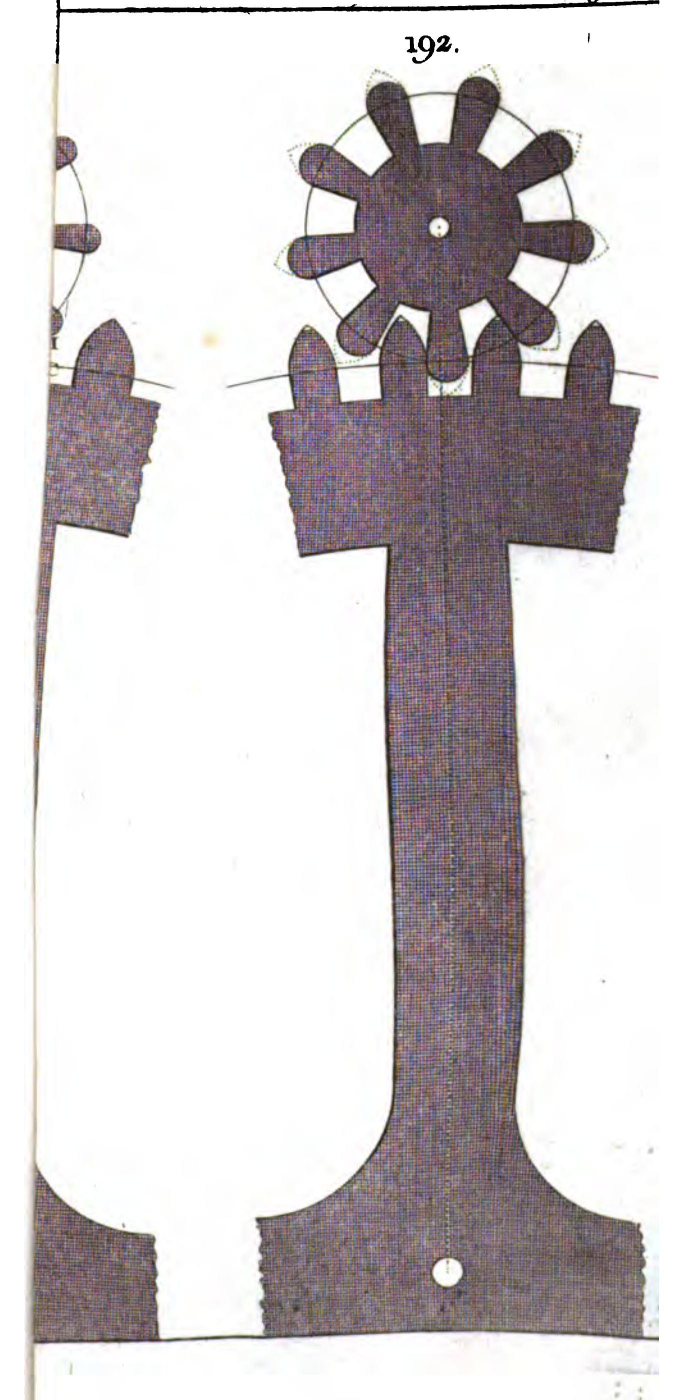


K
I
G
H
h
Q
Y
P
O
e
E
X
N
V
T
A
L
D
RC
Z
&
185
186
G
V
B
T
A
b
S
X
D
RC
Z
&
Y
F
F

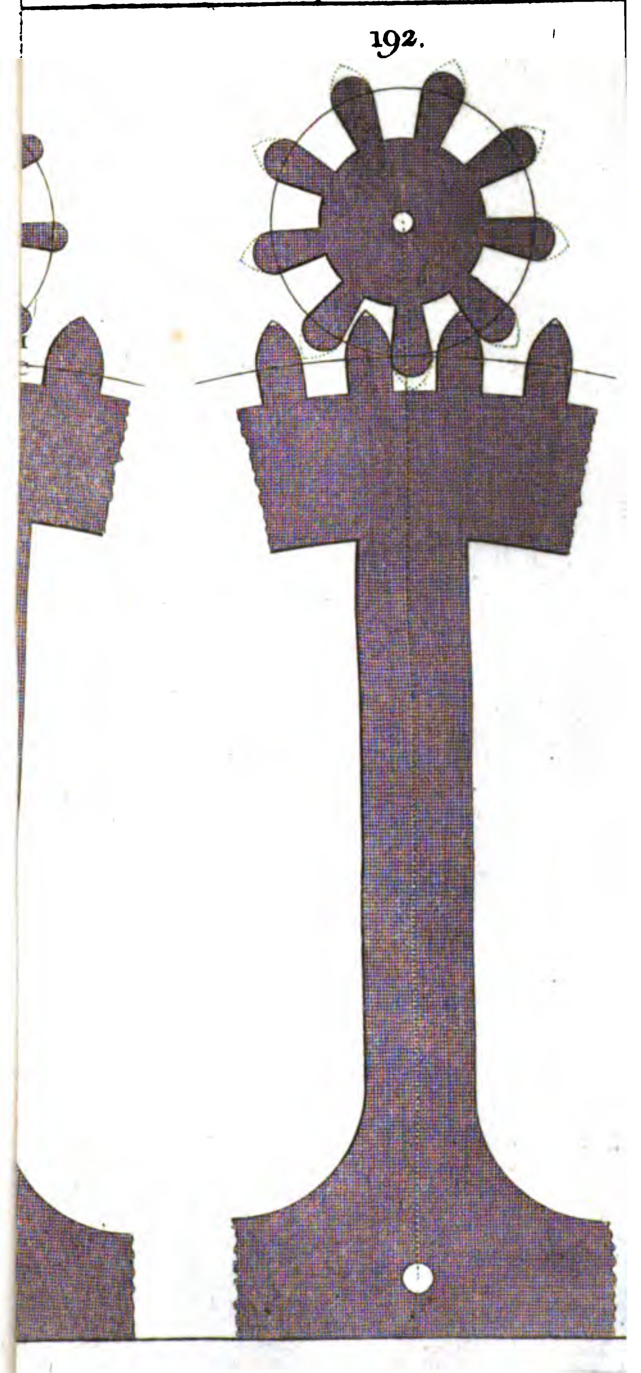

H
C
188


190

192.



192.



192.

194

se trouveront alongées, & cette précaution sera suffisante pour éviter les arboutemens.

Si l'on vouloit que les parties dont les aîles sont alongées fussent courbées de manière que la roue conduisît le pignon avec autant de régularité lorsque ses dents rencontrent les aîles avant le plan des axes & les poussent par leurs parties courbes, que quand elles les poussent par leurs flancs plans après le plan des axes; il faudroit faire les courbures des bouts de ces aîles, en forme d'épicycloïdes sphériques engendrées par le roulement d'un cone droit qui auroit pour diamétre le rayon du cercle qui passe par les naissances des courbures de toutes les dents de la roue. Ce cone droit roulant auroit son axe parallèle à celui de la roue, & son sommet dans l'axe du pignon.

Ces épicycloïdes qui auront leurs naissances aux extrémités des diamètres principaux du pignon, étant tracées, on formera les surfaces courbes des bouts des aîles par le moyen d'une ligne droite qui passera par le sommet du cone du pignon, & qu'on fera glisser suivant ces épicycloïdes.

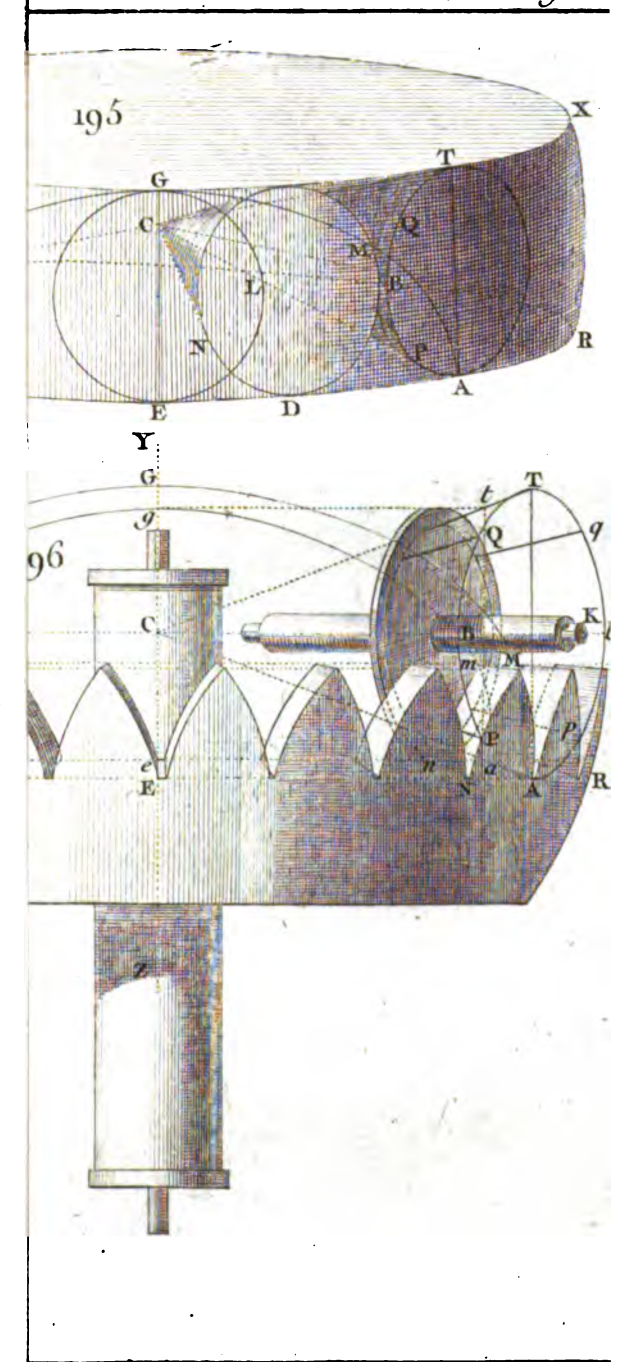
On entendra & l'on démontrera aisément cette construction, si l'on regarde le pignon comme une roue de chan, & la roue comme un pignon.

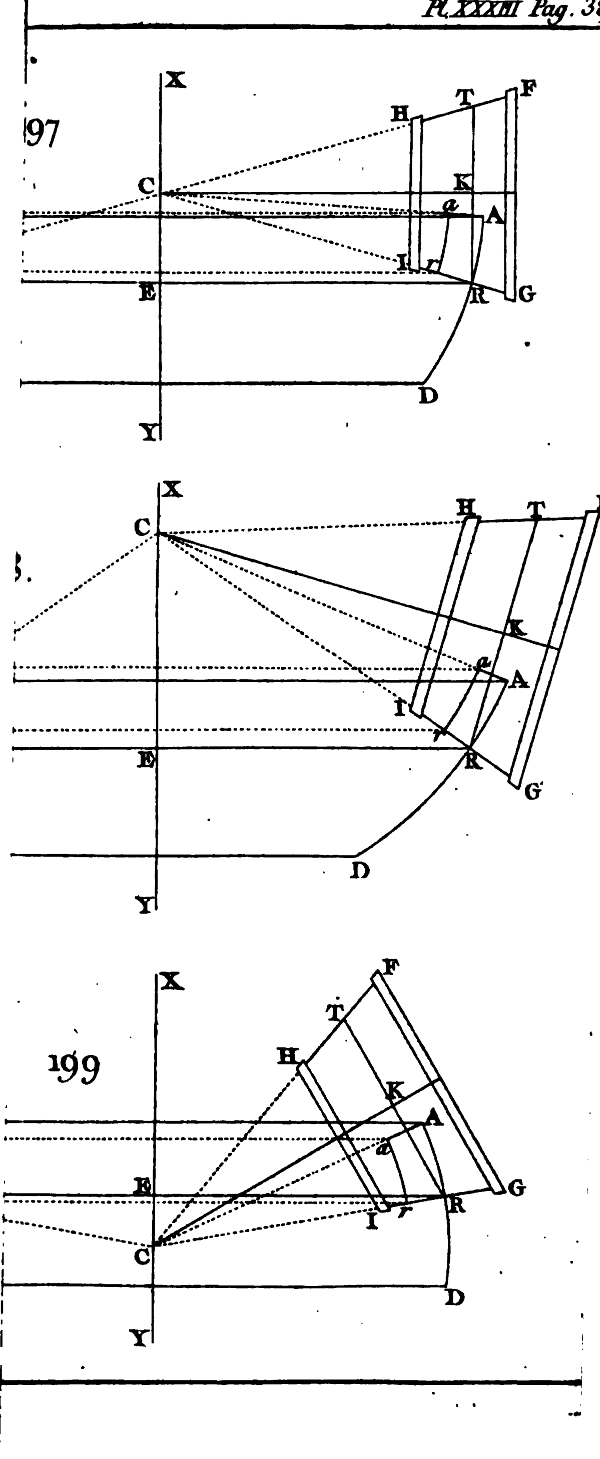
Soit qu'on arrondisse les bouts des aîles en forme de demi-cylindre, ou qu'on les courbe en forme d'épicycloïde sphérique; il faudra, pour loger ces augmentations d'aîles entre les dents de la roue, enfoncer dans le chan de cette roue au dessous de la circonférence du cercle qui passe par les naissances des courbes de toutes les dents, les vuides qui séparent ces dents, & former les côtés de ces

enfonçures suivant des plans menés par l'axe de la roue & par les naissances des courbures de ses dents.

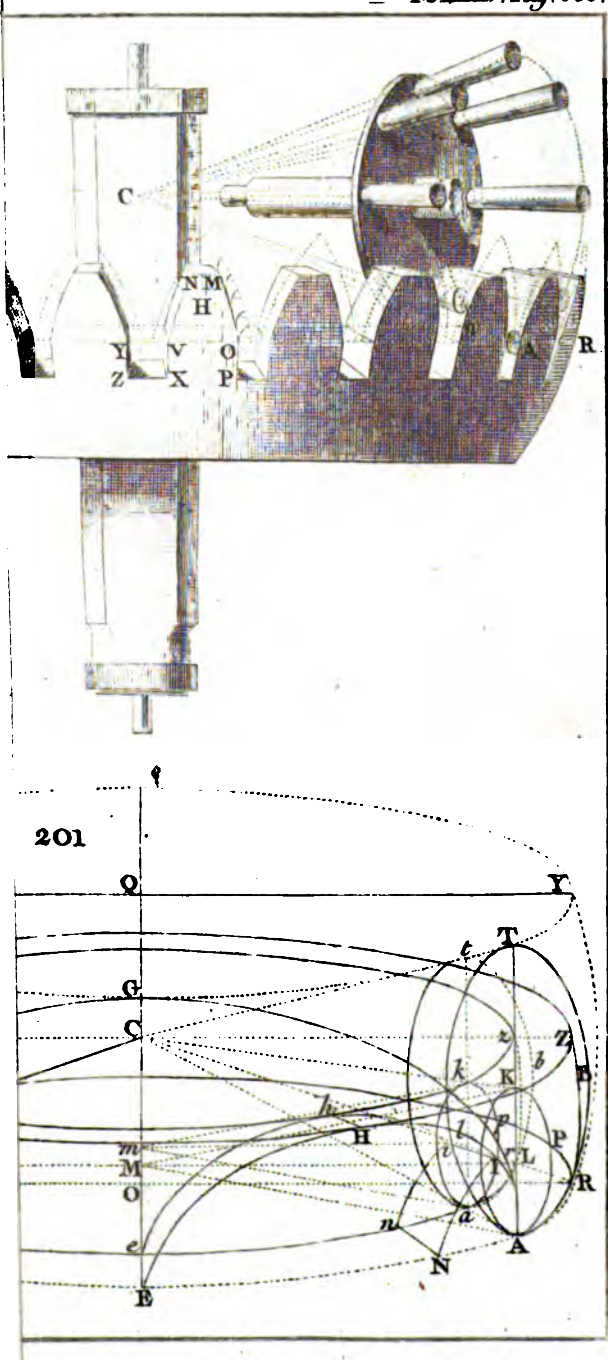
Fig. 202. On a dessiné dans la figure 202 une roue de chan vûe de profil, avec un pignon dans lequel elle engrène. Les parties courbes des dents de la roue sont séparées des parties droites des mêmes dents, par une droite *RES* qui représente la circonférence du cercle qui passe par les naissances des courbures de ces dents. Les flancs plans des aîles du pignon sont aussi séparés des parties courbes de ces aîles par la surface convexe du cone *CABT*.

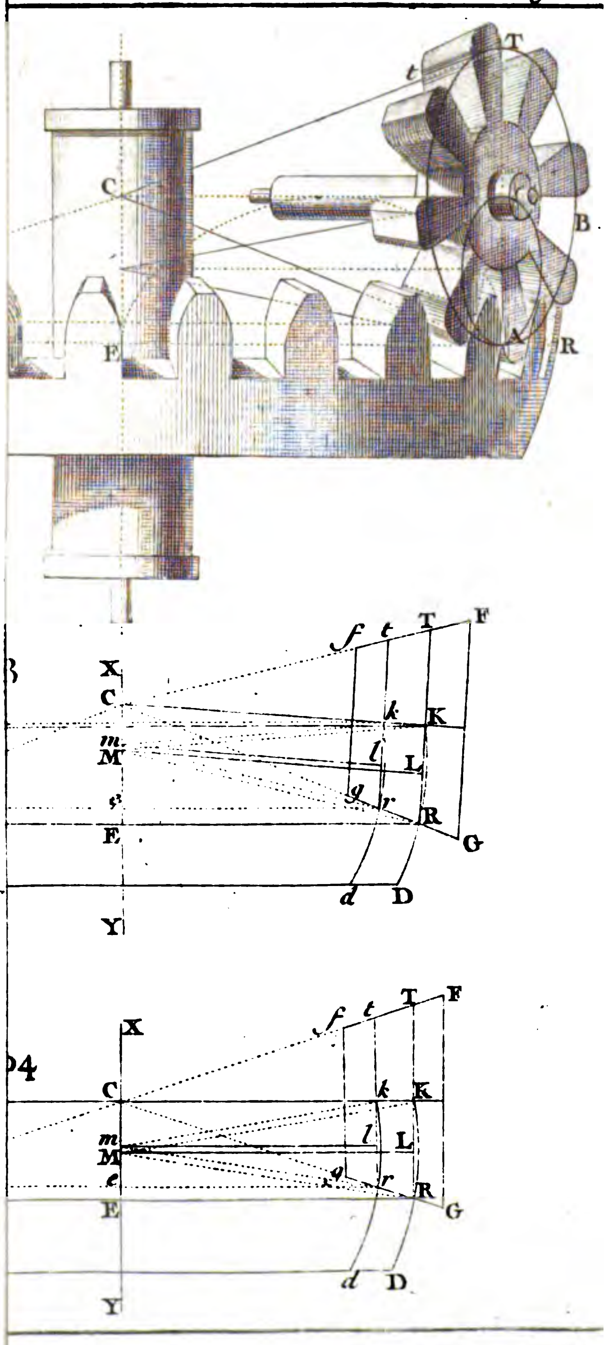


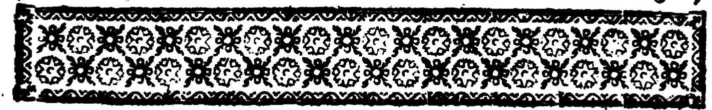

195
X
T
G
C
Q
M
L
B
N
P
R
E
D
A
Y
G
g
t
T
Q
q
96
C
K
B
m
M
P
p
e
n
a
E
N
A
R
Z



97
X
C
H
T
F
K
a
A
I
r
E
R
G
D
Y
X
C
H
T
K
a
A
I
r
E
R
G
D
Y
199
X
F
T
H
K
A
a
E
G
R
I
r
C
D
Y


C
N M
H
Y
V
O
R
A
Z
X
P
201
Q
Y
T
t
G
C
z
Z
b
k
K
B
h
l
p
H
P
m
i
L
M
I
R
O
a
n
A
e
N
E


T
t
C
B
F
A
R
f
t
T
F
X
C
k
K
m
M
l
L
g
r
R
E
G
d
D
Y
94
f
t
T
F
X
C
k
K
m
M
l
L
e
q
r
R
E
G
d
D
Y



ÉLÉMENS DE MÉCHANIQUE STATIQUE.

LIVRE ONZIEME.

Des nombres de Dents que les Roues d'une Machine doivent avoir, pour que deux ou plusieurs d'entr'elles fassent en même temps des nombres donnés de révolutions.

571. Quoique l'art de trouver les nombres de dents qu'il faut donner aux roues, pour que deux ou plusieurs d'entr'elles fassent en même temps des nombres donnés de révolutions, ne regarde point l'équilibre, & ne soit par conséquent point une partie de l'objet de la Méchanique statique, il est d'une si grande utilité pour la composition des machines, principalement de celles qui servent à mesurer le temps & à en marquer différentes périodes, qu'on ne peut pas se dispenser d'en parler dans un traité où l'on doit avoir en vûe la construction des machines.

On distingue en général deux sortes de machines, celles qui servent à multiplier la force motrice, & celles qui ont principalement pour objet la régularité des mouvemens contemporains de certaines

pièces. Dans les premières, il n'eſt preſque jamais bien important qu'une roue faſſe un tour juſte ou un certain nombre de tours, pendant qu'une autre fera un certain autre nombre donné de révolutions; & l'on doit avoir principalement pour objet que la force motrice ſe communique d'une pièce à l'autre avec le moins de perte qu'il eſt poſſible. Dans les autres machines, la conſervation de la force dans ſa communication d'une pièce à l'autre, n'eſt pas la ſeule choſe à conſidérer; & il eſt ſouvent de leur eſſence que pluſieurs pièces faſſent en même temps de certains nombres donnés de révolutions. Comme les machines propres à meſurer le temps ſont de cette eſpèce, ce ſera principalement à la conſtruction de ces machines qu'on appliquera l'art de trouver les nombres de dents & d'aîles que les roues & les pignons doivent avoir pour faire faire en même temps à pluſieurs pièces de certains mouvemens, ou des nombres donnés de révolutions.

Si l'on pouvoit donner aux roues & aux pignons d'une machine autant de dents qu'on voudroit, rien n'empêcheroit de procurer à pluſieurs de ſes pièces tous les mouvemens contemporains qu'on voudroit; mais on trouve ſouvent beaucoup de difficulté à le faire, & même de l'impoſſibilité, faute de pouvoir donner aux roues & aux pignons un aſſez grand nombre de dents.

Lorſqu'on ne peut pas faire aſſez de dents aux roues & aux pignons d'une machine, pour qu'une de ces roues faſſe un tour juſte pendant qu'une autre fera un nombre demandé de révolutions, il faut ſe contenter d'en approcher le plus près qu'il eſt poſſible, en employant des roues qui n'aient

qu'autant de dents qu'elles en peuvent porter, ou qu'on en peut tailler commodément dans leurs circonférences, & faire en ſorte que l'erreur qu'il y aura dans le rapport de la révolution de l'une, au nombre demandé des révolutions de l'autre, ſoit inſenſible même après un grand nombre de révolutions de ces roues.

Les méthodes pour trouver les nombres de dents & d'aîles qu'il faut donner aux roues & aux pignons d'une machine, pour que deux de ces pièces faſſent en même temps de certains nombres de révolutions, étant plus ou moins ſimples, ſuivant qu'on peut ou qu'on ne peut pas donner aux roues & aux pignons aſſez de dents pour produire exactement ces révolutions, & ces méthodes étant dépendantes des mêmes principes; l'ordre demande qu'on partage ce Livre en trois Chapitres. Dans le premier, on expliquera les principes généraux ſur leſquels eſt fondé l'art de trouver les nombres de dents & d'aîles qu'il faut donner aux roues & aux pignons. Dans le ſecond, on fera l'application de ces principes à la recherche des nombres des dents & des aîles des roues & des pignons, dans le cas où le produit des roues & celui des pignons ſe décompoſent en facteurs qui peuvent être les nombres des dents & des aîles de ces roues & de ces pignons. Enfin dans le troiſième, on fera l'application des mêmes principes à la même recherche, lorſque les premiers produits qu'on trouve pour ceux des roues & des pignons, ne ſe décompoſent point en facteurs aſſez petits pour être les nombres des dents & des aîles de ces roues & de ces pignons.

CHAPITRE PREMIER.

Des principes généraux pour trouver les nombres des Dents & des Aîles des Roues & des Pignons.

I.

572. LES nombres des dents des roues ou des pignons ne peuvent pas contenir des fractions; on ne peut pas faire, par exemple, une roue de 60½ dents; parce qu'une demi-dent ne pourroit être qu'une dent qui seroit à la vérité plus petite que les autres, mais qui n'auroit point d'autre propriété que de rendre la division de la roue inégale, & de causer des arrêts dans la machine. Ce qu'on dit des roues, doit s'entendre aussi des pignons & des lanternes, puisque ce sont de véritables roues.

II.

573. Si l'on décompose un nombre donné quelconque dans tous les facteurs qui le composent, & qu'on multiplie ensuite tous ces facteurs les uns par les autres, dans quel ordre on voudra, le produit qui résultera de toutes ces multiplications, sera égal au nombre donné (*Arith. n°.* 20).

Par exemple, si l'on décompose 17280 dans tous ses facteurs qui sont 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, & qu'on multiplie ensuite tous ces facteurs les uns par les autres, en leur donnant tel arrangement qu'on voudra, on trouvera toûjours pour le produit le nombre 17280 qu'on a premièrement décomposé.

Ainsi lorsqu'on aura un grand nombre de facteurs, par exemple 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, à multiplier les uns par les autres, pour en former un seul produit; on pourra les partager en autant de bandes qu'on voudra, comme (2, 2, 2, 2, 3); (2, 2, 2, 3, 3), (5): & après avoir multiplié les uns par les autres tous les facteurs de chaque bande, pour les réduire aux facteurs composés 48, 72, 5, on pourra multiplier les uns par les autres ces nouveaux facteurs, & l'on aura pour produit le nombre 17280 dont tous les facteurs proposés sont tirés.

THÉOREME.

574. *Soit qu'une roue conduise un pignon ou qu'un pignon conduise une roue; le nombre des tours de la roue multiplié par le nombre de ses dents, est égal au nombre des tours que le pignon fait en même temps, multiplié par le nombre de ses aîles; en sorte que les nombres des tours contemporains de la roue & du pignon sont réciproquement proportionnels aux nombres de leurs dents.* Fig. 205.

DÉMONSTRATION.

Que les nombres des dents de la roue *A* & du pignon *F* soient représentés par les grandes lettres. . . . . A, F,

En que les nombres de leurs tours contemporains, le soient par les petites lettres . . . a, f,

Il faut démontrer qu'on aura $a \times A = f \times F$; & par conséquent $a : f :: F : A$.

1°. Le nombre des dents de la roue étant représenté par A; à chaque tour que fera la roue, il engrènera dans le pignon un nombre de dents

représenté par A. Ainsi pendant que la roue fera un nombre de tours exprimé par a, il engrènera dans le pignon un nombre de dents représenté par $a \times A$.

2°. Puisque F représente le nombre des aîles du pignon ; à chaque tour que fera le pignon, il engrènera dans la roue un nombre d'aîles représenté par F. Ainsi pendant que le pignon fera un nombre de tours exprimé par f, il engrènera dans la roue un nombre d'aîles représenté par $f \times F$.

Mais pendant que la roue & le pignon feront leurs révolutions contemporaines, il engrènera autant de dents de la roue dans le pignon, qu'il engrènera d'aîles du pignon dans la roue. Ainsi l'on aura $a \times A = f \times F$; & regardant les deux membres de cette égalité comme le produit des extrêmes & celui des moyens d'une proportion, l'on aura $a : f :: F : A$, c. q. f. d.

COROLLAIRE I.

Fig. 105. 575. Puisque $a \times A = f \times F$ ou $a : f :: F : A$, on aura $a = \frac{f \times F}{A}$ & $f = \frac{a \times A}{F}$; c'est-a-dire que le nombre des tours de la roue sera égal au produit du nombre des tours contemporains & du nombre des aîles du pignon, divisé par le nombre des dents de la roue, & que le nombre des tours du pignon sera égal au produit du nombre des tours contemporains & du nombre des dents de la roue, divisé par le nombre des aîles de ce pignon.

Ainsi lorsque la roue ne fera qu'un seul tour, c'est-à-dire lorsqu'on aura $a = 1$, le nombre des tours du pignon sera égal au nombre des dents de

la roue divisé par le nombre des aîles du pignon; car alors on aura $f = \frac{A}{F}$.

Et lorsque le pignon ne fera qu'un tour, c'est-à-dire qu'on aura $f = 1$; le nombre des tours de la roue sera égal au nombre des aîles du pignon, divisé par le nombre des dents de la roue; parce qu'alors on trouvera $a = \frac{F}{A}$.

COROLLAIRE II.

576. Lorsqu'une roue *A* conduit un pignon *F*; qu'une seconde roue *B* fixée à ce pignon, mène un second pignon *G*; qu'une troisième roue *C* rivée à ce second pignon engrène dans un troisième pignon *H*; & qu'une quatrième roue *D* enarbrée avec le troisième pignon, conduit un quatrième pignon *I*, &c; si l'on représente par les mêmes grandes lettres *A*, *B*, *C*, *D*, *F*, *G*, *H*, *I*, &c. les nombres des dents & des aîles de ces roues & de ces pignons, & qu'on désigne par les petites lettres *a*, *f*, *g*, *h*, *i*, &c. les nombres des tours contemporains de la roue *A* & des pignons *F*, *G*, *H*, *I*, &c. on trouvera (n°. 574) Fig. 107.

1°. . . . . $a : f :: F : A$;

2°. Les tours contemporains du pignon *F* ou de la roue *B* & du pignon *G* étant représentés par *f*, *g*, l'on aura $f : g :: G : B$;

3°. Les tours contemporains du pignon *G* ou de la roue *C* & du pignon *H* étant désignés par *g*, *h*, on aura $g : h :: H : C$;

4°. Les tours contemporains du pignon *H* ou de la roue *D* & du pignon *I* étant exprimés par *h*, *i*, l'on aura $h : i :: I : D$.

Ainsi en multipliant toutes ces proportions par ordre, on aura $a : i :: F\times G\times H\times I : A\times B\times C\times D$; d'où l'on déduira $a\times A\times B\times C\times D = i\times F\times G\times H\times I$, & $i = \frac{a\times A\times B\times C\times D}{F\times G\times H\times I}$. C'est-à-dire que le nombre des tours de la première roue A multiplié par le produit des nombres de dents de toutes les roues, sera égal au nombre des tours du dernier pignon I, multiplié par le produit des nombres d'aîles de tous les pignons; & que le nombre des tours du dernier pignon, sera égal au nombre des tours de la première roue multiplié par le produit des nombres de dents de toutes les roues, & divisé par le produit des nombres d'aîles de tous les pignons.

Il suit de là que si $a = 1$, c'est-à-dire si la première roue A ne fait qu'un tour, l'on aura $A\times B\times C\times D = i\times F\times G\times H\times I$, & $i = \frac{A\times B\times C\times D}{F\times G\times H\times I}$. C'est-à-dire que le produit de toutes les roues sera égal au nombre des tours que le dernier pignon fera pendant un tour de la première roue, multiplié par le produit de tous les pignons; & que le nombre des tours du dernier pignon pendant un tour de la première roue, sera égal au produit de toutes les roues divisé par le produit de tous les pignons.

Fig. 207. Si l'on ne vouloit considérer que les trois roues de suite A, B, C, & les trois pignons F, G, H qui engrènent avec elles, ou si le rouage n'étoit composé que de trois roues A, B, C, & de trois pignons F, G, H; on n'auroit que ces trois proportions $\left\{\begin{matrix} a : f :: F : A \\ f : g :: G : B \\ g : h :: H : C \end{matrix}\right\}$,

lesquelles étant multipliées par ordre donneroient $a : h :: F \times G \times H : A \times B \times C$; d'où l'on déduiroit $a \times A \times B \times C = h \times F \times G \times H$, & $h = \frac{a \times A \times B \times C}{F \times G \times H}$. Et si la roue A ne faisoit qu'un tour, on trouveroit $A \times B \times C = h \times F \times G \times H$, & $h = \frac{A \times B \times C}{F \times G \times H}$; c'est-à-dire que le produit de toutes les roues de ce rouage seroit encore égal au produit de tous ses pignons, multiplié par le nombre des tours que feroit le dernier de ces pignons pendant un tour de la première roue A; & que le nombre des tours que le dernier pignon feroit pendant un tour de la roue A, seroit égal au produit de toutes les roues divisé par le produit de tous les pignons.

Si l'on ne considéroit que les deux premières roues A, B & les deux premiers pignons F, G, ou si le rouage n'étoit composé que de deux roues A, B & de deux pignons F, G, on n'auroit que ces deux proportions $\left\{\begin{matrix} a : f :: F : A \\ f : g :: G : B \end{matrix}\right\}$, lesquelles étant multipliées par ordre, donneroient $a : g :: F \times G : A \times B$; d'où l'on déduiroit $a \times A \times B = g \times F \times G$, & $g = \frac{a \times A \times B}{F \times G}$. Et si la roue A ne faisoit qu'un tour, c'est-à-dire si l'on trouvoit $a = 1$, on auroit $A \times B = g \times F \times G$, & $g = \frac{A \times B}{F \times G}$. Ainsi dans ce dernier rouage, comme dans tous les autres, le produit des roues sera égal au produit des pignons multiplié par le nombre de tours que fera le dernier pignon pendant un tour de la première roue; & Fig. 208.

le nombre de tours que le dernier pignon fera pendant un tour de la première roue, sera égal au produit des roues divisé par le produit des pignons.
Fig. 205, 206, 207 & 208. Donc en général, soit que le rouage contienne une roue A & un pignon F (*figure* 205), ou deux roues A, B & deux pignons (*fig.* 208), ou trois roues & trois pignons (*fig.* 207), ou un plus grand nombre quelconque de roues, & pareil nombre de pignons (*fig.* 206); si l'on nomme R le produit de toutes les roues, P le produit des pignons, & qu'on représente par p le nombre des tours que fera le dernier pignon pendant un seul tour de la première roue A, l'on aura $R = p \times P$, & $p = \frac{R}{P}$.

COROLLAIRE III.

577. Comme le nombre des dents de chaque roue doit être sans fraction (*n°.* 572), le produit R de toutes les roues doit être un nombre entier, & le produit $p \times P$ qui doit être égal à R, sera aussi un nombre entier. Ainsi lorsque p qui représente le nombre des tours que le dernier pignon fait pendant un tour de la roue A, contiendra quelque fraction qui ne peut devenir un entier qu'en la multipliant par un nombre égal à son dénominateur ou multiple de ce dominateur, il faudra que le produit P des pignons, qui est toûjours un nombre entier, soit égal au dénominateur de cette fraction ou multiple de ce dénominateur.

COROLLAIRE IV.

578. En considérant l'équation $R = p \times P$, on remarque aisément que

1°. Si le nombre qu'on prendra pour la valeur de P qui repréſente le produit des pignons, n'eſt point trop grand pour être le nombre des aîles d'un ſeul pignon, & qu'après avoir multiplié ce nombre par celui des tours que le dernier pignon doit faire, le produit ne ſoit pas trop grand pour être le nombre des dents d'une roue; on pourra composer le rouage d'une ſeule roue *A* & d'un ſeul pignon *F*, ſi rien d'ailleurs ne s'y oppoſe. Fig. 205.

Mais ſi le nombre qu'on prendra pour *P*, c'eſt-à-dire pour le produit des pignons, eſt trop grand pour être le nombre des aîles d'un ſeul pignon; ou ſi, après avoir multiplié ce nombre par le nombre des tours que le dernier pignon doit faire pendant un tour de la roue *A*, le produit eſt trop grand pour être le nombre des dents d'une ſeule roue; il faudra décompoſer ce produit en autant de facteurs qu'il ſera beſoin, pour qu'aucun de ces facteurs ne ſoit plus grand que le nombre des dents qu'on peut donner à une roue, & prendre ces facteurs pour les nombres des dents d'autant de roues. Enſuite il faudra décompoſer le nombre repréſenté par *P* en autant de facteurs qu'on aura pris de roues, pour en faire les nombres des aîles d'autant de pignons.

S'il arrive que le nombre qu'on ſera obligé de prendre pour *P*, ou pour le produit des pignons, ſoit un nombre ſimple, c'eſt-à-dire qu'on ne puiſſe pas le décompoſer en pluſieurs facteurs entiers moindres que lui; & que ce nombre ſoit trop grand, relativement à la grandeur des pièces de la machine qu'on veut compoſer, pour être le nombre des aîles d'un ſeul pignon; ou ſi après avoir décompoſé ce nombre en pluſieurs facteurs, il s'en trouve quelqu'un

indécomposable & trop grand pour être le nombre des aîles d'un pignon ; le dernier pignon ne pourra pas faire pendant un tour de la première roue, le nombre des tours qu'on demandera ; & il faudra avoir recours à l'approximation, en négligeant la moindre partie qu'on pourra des nombres de tours demandés.

Lors même que le nombre qui représentera le produit *P* des pignons, pourra se décomposer en autant de facteurs aussi petits qu'on voudra ; si après avoir multiplié ce nombre par celui *p* des tours que le dernier pignon doit faire pendant une révolution de la roue *A*, le produit est un nombre simple & trop grand pour être le nombre des dents d'une roue ; ou si après avoir décomposé ce produit en plusieurs facteurs simples, il s'en trouve quelqu'un trop grand pour être le nombre des dents d'une roue ; on sera encore réduit à faire faire au dernier pignon un nombre de tours plus grand ou moindre d'une quantité fort petite, que celui qui est représenté par la lettre *p*.

Suivant que les nombres qu'on trouve pour le produit des pignons & pour celui des roues, peuvent ou ne peuvent pas être décomposés en facteurs qui n'excèdent point les nombres des aîles & des dents qu'on peut donner aux pignons & aux roues de la machine qu'on veut construire, le Problème pour trouver les nombres des aîles & des dents de ces pignons & de ces roues, demande des opérations plus ou moins simples, qu'on va expliquer dans les deux Chapitres suivans.

CHAPITRE II.

De la recherche des nombres des Dents & des Aîles des Roues & des Pignons, dans le cas où le produit des Roues & celui des Pignons peuvent être décomposés en facteurs qui n'excèdent point les nombres des Dents & des Aîles qu'on peut donner à ces Roues & à ces Pignons.

COMME la méthode pour trouver les nombres des dents & des aîles des roues & des pignons, est principalement utile dans la construction des horloges, & que des exemples sont suffisans pour la faire concevoir; ce Chapitre ne contiendra que deux Problèmes particuliers qui auront pour objet les horloges.

PROBLEME.

579. *Trouver les nombres des dents & des aîles qu'il faut donner aux roues & aux pignons d'une horloge qui doit marquer les heures, les minutes & les secondes, & dont le balancier doit battre les secondes.*

SOLUTION.

Une horloge qui marque les heures, les minutes & les secondes, a trois aiguilles *K*, *L*, *M*. La première *K* de ces aiguilles fait ordinairement un tour en 12 heures & marque les heures sur un cadran divisé en 12 parties égales : la seconde *L* fait son tour en une heure ou 60 minutes, & marque les minutes sur un cadran divisé en 60 parties égales ; & la troisième *M* Fig. 209.

fait ſon tour en une minute ou 60 ſecondes, & marque les ſecondes ſur un cadran qui eſt auſſi diviſé en 60 parties égales.

Comme il eſt en quelque façon néceſſaire que les trois roues *A*, *C*, *E* dont les tiges portent les aiguilles des heures, des minutes & des ſecondes, tournent d'un même côté, on ne doit point les mettre de ſuite; mais il faut placer une roue *B* entte les roues *A* & *C* qui portent les aiguilles des heures & des minutes, & mettre une autre roue *D* entre celles *C* & *E* qui portent les aiguilles des minutes & des ſecondes. Ainſi tout le rouage néceſſaire pour faire marquer à une horloge les heures, les minutes & les ſecondes, conſiſte en cinq roues *A*, *B*, *C*, *D*, *E* qui ſe communiquent le mouvement au moyen de quatre pignons *F*, *G*, *H*, *I*.

1°. Comme le balancier de l'horloge doit battre les ſecondes, c'eſt-à-dire faire 60 vibrations par minute, & que chaque dent de la roue *E* lui fera faire deux vibrations, il eſt évident qu'en donnant 30 dents à cette roue, elle fera ſa révolution en une minute, c'eſt-à-dire pendant que le balancier fera 60 vibrations. Ainſi voilà le nombre des dents de la roue *E* déterminé.

2°. Pour trouver les nombres des dents & des aîles des deux roues *C*, *D* & des deux pignons *H*, *I* dans leſquels elles engrènent, on remarquera que le pignon *I* de la roue qui porte l'aiguille des ſecondes, devant faire un tour par minute, fera 60 tours pendant que la roue qui porte l'aiguille des minutes n'en fera qu'un.

Or, en repréſentant par les lettres *C*, *D*, *H*, *I* les nombres des dents & des aîles des deux roues & des

des deux pignons désignés par les mêmes lettres, on trouvera (n°. 576) $60 \times H \times I = C \times D$. Ainsi en prenant pour *H* & *I* tels nombres d'aîles qu'on voudra, on aura la valeur du produit $C \times D$ des nombres de dents que les deux roues *C*, *D* doivent porter.

Si l'on donne 6 aîles à chacun des deux pignons *H*, *I*, l'équation $60 \times H \times I = C \times D$ deviendra $60 \times 6 \times 6 = C \times D$. Ainsi il faudra partager $60 \times 6 \times 6$ en deux facteurs qui puissent être les nombres des dents des deux roues *C*, D.

Pour choisir plus commodément ces deux facteurs, on décomposera le nombre $60 \times 6 \times 6$ dans tous les facteurs 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3, qui le composent. Ensuite on partagera tous ces facteurs en deux bandes telles qu'on voudra, par exemple, en celle-ci (2, 2, 2, 2, 3), (5, 3, 3); & les deux nombres 48 & 45 qu'on trouvera en multipliant les uns par les autres les facteurs de chaque bande, feront les nombres des dents des deux roues *C* & *D*.

On auroit pû partager les mêmes facteurs 2, 2, 3, 5, 2, 3, 2, 3 en ces deux autres bandes (2, 2, 3, 5), (2, 3, 2, 3); & les nombres 60 & 36 qui seroient résultés de la multiplication des facteurs de chaque bande, auroient aussi pû être pris pour les nombres des dents des mêmes roues *C* & *D*. Mais comme il convient de faire les roues *C*, *D* les moins inégales que l'on peut, quoique cela ne soit point nécessaire, on préférera les deux premiers nombres 48 & 45 aux deux derniers 60 & 36.

3°. Pour déterminer les nombres des dents & des aîles des deux roues *A* & *B*, & des deux pignons *F*, *G* dans lesquels elles engrènent, on remarquera

que le pignon *G* qui porte l'aiguille des minutes, faisant un tour par heure, fera 12 tours pendant que la roue *A* qui porte l'aiguille des heures n'en fera qu'un. Ainsi en représentant par les lettres *A*, *B*, *F*, *G*, les nombres des dents & des aîles des deux roues & des deux pignons de même nom, on aura (*n°.* 576) $12 \times F \times G = A \times B$; d'où il suit qu'en prenant pour *F* & *G* tels nombres qu'on voudra, on aura la valeur du produit des deux roues *A* & *B*.

Si l'on donne 8 aîles au pignon *F*, & 16 aîles au pignon *G* qui doit être plus gros que les autres, parce que son arbre est un canon qui est chaussé sur la tige de la roue *C* & qui porte l'aiguille des minutes; l'équation $12 \times F \times G = A \times B$ deviendra $12 \times 8 \times 16 = A \times B$; ainsi il faudra partager le nombre $12 \times 8 \times 16$ en deux facteurs pour avoir les nombres des dents des deux roues *A* & *B*.

Pour choisir plus aisément ces deux facteurs, on décomposera d'abord le nombre $12 \times 8 \times 16$ en tous ses facteurs qui seront 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2; ensuite on partagera tous ces facteurs en deux bandes telles qu'on voudra, par exemple en celles-ci (2, 2, 2, 2, 3), (2, 2, 2, 2, 2); & les deux nombres 48 & 32 qu'on trouvera en multipliant ensemble les facteurs de chacune de ces deux bandes, seront les nombres des dents des deux roues *A* & *B*.

Les nombres des dents des cinq roues *A*, *B*, *C*, *D*, *E* peuvent donc être 48, 32, 48, 45, 30, en prenant 8, 16, 6, 6 pour les nombres des aîles des quatre pignons *F*, *G*, *H*, *I*. C. Q. F. T.

Il est bon de faire remarquer que la force motrice ne s'applique jamais à la roue A *des heures, ni à celle* B *qui engrène avec le pignon* G *dont le canon porte l'aiguille des minutes; mais qu'on l'applique à la roue* C, *lorsqu'on veut que l'horloge ne marche que* 30 *ou* 36 *heures, ou à quelqu'autre roue* R *qu'on ajoûte pour faire marcher l'horloge* 8 *ou* 10 *jours sans la remonter; & que cette nouvelle roue* R *qui peut avoir tel nombre de dents qu'on voudra, engrène dans un pignon porté par la tige de la roue* C *des minutes.*

PROBLEME.

580. *Trouver les nombres des dents & des aîles des roues & des pignons pour une montre qui doit marquer les heures & les minutes, & dont le balancier doit faire* 17280 *vibrations par heure.*

SOLUTION.

Sans avoir égard à l'arrangement qu'on donne aux roues d'une montre; soient *A* la roue qui porte l'aiguille des heures & qui fait son tour en 12 heures, *C* celle qui porte l'aiguille des minutes & qui fait son tour dans une heure, & *F* la roue de rencontre qui engrène dans les palettes du balancier, & dont le nombre des dents est ordinairement impair. Fig. 210 & 211.

Dans un tour de la roue *F*, chaque dent de cette roue fera faire deux vibrations au balancier; ainsi en représentant par *F* le nombre des dents de cette roue, 2 *F* sera le nombre des vibrations que le balancier fera à chaque tour de la roue *F*.

Si l'on représente par *C*, *D*, *E*, *I*, *K*, *L* les nombres des dents & des aîles des roues & des pignons

de même nom, le nombre des tours que le pignon L ou la roue F fera pendant un tour de la roue C, sera exprimé (nº. 576) par $\frac{C \times D \times E}{I \times K \times L}$. Ainsi en multipliant ce nombre de tours $\frac{C \times D \times E}{I \times K \times L}$ de la roue F par le nombre des vibrations $2F$ que le balancier fera pendant un tour de cette roue, le produit $\frac{C \times D \times E \times 2F}{I \times K \times L}$ sera le nombre des vibrations que le balancier fera pendant un tour de la roue C.

Mais par une condition du Problème, le balancier doit faire 17280 vibrations par heure ou pendant un tour de la roue C. Donc $\frac{C \times D \times E \times 2F}{I \times K \times L} = 17280$ ou $C \times D \times E \times 2F = 17280 \times I \times K \times L$, ou enfin $C \times D \times E \times F = \frac{17280}{2} \times I \times K \times L$; c'est-à-dire que le produit des roues C, D, E, F sera égal au produit des pignons I, K, L multiplié par la moitié du nombre des vibrations que le balancier fera pendant un tour de la roue C. Ainsi en donnant aux pignons I, K, L tels nombres d'aîles qu'on voudra, on aura la valeur du produit $C \times D \times E \times F$ des roues.

Supposons qu'on donnera, comme à l'ordinaire, 6 aîles à chacun des pignons I, K, L; l'équation $C \times D \times E \times F = \frac{17280}{2} \times I \times K \times L$ deviendra $C \times D \times E \times F = \frac{17280}{2} \times 6 \times 6 \times 6$, ou $C \times D \times E \times F = 8640 \times 6 \times 6 \times 6$.

Ainsi pour avoir les nombres des dents des quatre roue *C*, *D*, *E*, *F*, il faudra décomposer le nombre $8640 \times 6 \times 6 \times 6$ en quatre facteurs.

Pour trouver plus commodément les quatre facteurs, ou les quatre nombres de dents qui conviennent le mieux aux quatre roues *C*, *D*, *E*, *F*, on décomposera le nombre $8640 \times 6 \times 6 \times 6$ en tous ses facteurs 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 2, 3, 2, 3, 2, 3; & après en avoir choisi quelques-uns dont le produit puisse être le nombre des dents de la roue de rencontre *F*, on partagera les autres en trois bandes dont les produits seront les nombres des dents qu'on peut donner aux trois autres roues *C*, *D*, *E*. Mais avant de choisir les facteurs de la roue de rencontre *F*, on doit remarquer que

1°. Les dents de cette roue doivent être plus grandes ou plus écartées que celles des autres roues; ainsi elle doit avoir moins de dents que les autres: dans les montres, on ne lui donne jamais moins de 13 dents, & jamais plus de 17 dents à moins qu'elle ne soit extrêmement grande.

2°. Lorsque les dents de la roue de rencontre frappent alternativement les deux palettes d'un balancier ordinaire, leur nombre doit être impair. Car la verge du balancier doit passer en travers, vis-à-vis le milieu de cette roue, afin que ses dents fassent alternativement des impressions égales sur les deux palettes. Or la verge du balancier étant ainsi disposée, si le nombre des dents de la roue de rencontre étoit pair, deux dents opposées de cette roue rencontreroient en même temps & de la même façon les deux palettes; & le balancier étant poussé en même temps par deux forces égales & opposées,

s'arrêteroit. Au contraire, si le nombre des dents de la roue de rencontre est impair, toutes ses dents seront diamétralement opposées à des vuides. Ainsi pendant qu'une palette sera rencontrée & poussée par une dent, l'autre palette pourra être libre dans le vuide opposé à cette dent : en sorte que les dents de la roue de rencontre ne toucheront jamais les deux palettes à la fois, & tomberont sur elles alternativement pour donner au balancier des vibrations alternativement contraires.

Aucun des facteurs dans lesquels on a décomposé le produit des quatre roues *C*, *D*, *E*, *F* ne pouvant produire ni 13 ni 17 qui sont les limites des nombres de dents qu'on peut donner à la roue de rencontre d'une montre ; & le nombre 16 composé des facteurs 2, 2, 2, 2, ne convenant point à cette roue, parce qu'il est pair ; on sera obligé de prendre 15, ou le produit des deux facteurs 3 & 5 pour le nombre des dents de la roue *F* ; puis on distribuera le reste des facteurs en trois bandes quelconques, par exemple en celles-ci (2, 3, 3, 3,), (2, 2, 2, 2, 3), (2, 2, 2, 2, 3) dont les produits seront 54, 48, 48 ; & l'on aura 54, 48, 48, & 15 pour les nombres des dents des quatre roues *C*, *D*, *E*, *F*.

Comme la roue *A* qui porte l'aiguille des heures ne doit faire qu'un tour en 12 heures, c'est-à-dire pendant que la roue *C* des minutes en fera 12 ; si l'on représente par *A*, *B*, *G*, *H* les nombres des dents & des aîles des pignons désignés par les mêmes lettres, on aura, comme dans le Problème précédent, $12 \times G \times H = A \times B$. Ainsi en prenant pour les pignons *G*, *H* tels nombres qu'on voudra, on aura la valeur du produit des deux roues *A* & *B*.

Si l'on donne 10 aîles au pignon *G*, & 12 au pignon *H* qui doit être d'une même pièce avec le canon qui porte l'aiguille des minutes ; l'équation $12 \times G \times H = A \times B$ deviendra $12 \times 10 \times 12 = A \times B$; ainsi en prenant tous les facteurs 2, 2, 3, 2, 5, 2, 2, 3 du nombre $12 \times 10 \times 12$, & les partageant en deux bandes quelconques, telles que celles-ci (2, 2, 2, 5), (2, 2, 3, 3), les deux produits 40 & 36 qu'on trouvera en multipliant ensemble les facteurs de chaque bande, seront les nombres des dents des deux roues *A* & *B*; *& le Problème sera entièrement résolu.*

Pour faire marcher les montres 30 heures, on ajoûte une septième roue R *de 48 dents, qu'on fait engréner avec un pignon de 12 aîles, qui est ordinairement d'une même pièce avec la tige de la roue des minutes ; & l'on met sur l'arbre de cette roue une fusée conique taillée en spirale dans les pas de laquelle une chaîne fait 7 $\frac{1}{2}$ tours. Enfin, ayant attaché un bout de la chaîne au bas de la fusée, on attache l'autre bout à un barillet qui renferme un ressort ; & ce ressort fait faire au barillet assez de tours, pour qu'il se charge d'une quantité de chaîne égale à celle qui est dans les pas de la fusée. On doit remarquer qu'on fait le barillet le plus grand qu'il est possible relativement à la grandeur de la boîte de la montre, afin que le ressort y soit plus à son aise, & qu'il ait plus de facilité à faire faire à ce barillet le nombre de tours nécessaire pour qu'il se charge de la chaîne.*

On doit encore remarquer que l'arrangement qu'on a donné aux roues dans la figure 210 relative à ce Problème, ne doit être regardé que comme une disposition

possible qui fait mieux distinguer les pièces dont on veut trouver les nombres de dents, & que cet arrangement ne convient point à une montre dont les roues qui portent l'aiguille des minutes & celle des heures doivent être concentriques, & dont la roue de rencontre a son axe parallèle au plan des autres roues. Mais la disposition des mêmes roues est mieux marquée dans la figure 211.

CHAPITRE III.

De la recherche des nombres des Dents & des Aîles des Roues & des Pignons, dans le cas où le produit des Roues & celui des Pignons ne peuvent pas être décomposés en facteurs qui n'excèdent point les nombres des Dents & de Aîles qu'on peut donner à ces Roues & à ces Pignons.

Dans les rouages qui sont de même espèce que ceux dont il est question dans le Chapitre précédent, on est maître de donner aux pignons tels nombres d'aîles qu'on juge à propos ; & si l'on étoit obligé d'employer quelques roues déjà faites, ou qui servissent pour quelques révolutions particulières, & qu'il fallut trouver quelques pignons, il est aisé de voir qu'on y parviendroit aisément par les méthodes & les formules qu'on a données. Mais dans les rouages qui sont le sujet de ce Chapitre, on n'est pas maître de donner à aucun pignon le nombre d'aîles qu'on veut ; ainsi il faut chercher non seulement les nombres des dents des roues, mais encore ceux des aîles des pignons. Comme peu d'exemples suffisent pour

faire entendre la méthode qu'on doit suivre dans cette recherche, on n'en donnera que deux en forme de Problèmes, qui auront pour objet le mouvement annuel du soleil ou de la terre, & la révolution synodique de la lune, qu'on voudroit faire marquer par un horloge.

PROBLEME.

581. *Trouver les nombres des dents & des aîles des roues & des pignons d'un rouage qui, étant mené par un pignon placé sur la roue des heures d'une horloge, fasse faire un tour à une roue dans une année moyenne qu'on suppose de 365 jours 5 heures 49 minutes.*

SOLUTION.

Soient *A* la roue qui doit faire un tour en 365 jours 5 heures 49 minutes; *H* le pignon qui sera placé sur la roue des heures, & qui fera comme cette roue un tour en 12 heures; & *B*, *C*, *F*, *G* deux autres roues & deux autres pignons, par le moyen desquels le mouvement du pignon *H* sera communiqué à la roue *A*. Fig. 212.

Le pignon *H* faisant un tour en 12 heures, ou 2 tours par jour, fera 730 tours en 365 jours, & $\frac{5}{12}$ ou $\frac{300}{720}$ tours en 5 heures; & comme la minute est égale à $\frac{1}{60}$ d'heure ou à $\frac{1}{720}$ de 12 heures, le même pignon fera $\frac{49}{720}$ tours en 49 minutes; ainsi ce pignon fera $730\,\frac{349}{720}$ tours en 365 jours 5 heures 49 minutes, c'est-à-dire pendant que la roue *A* doit faire sa révolution.

Mais (n°. 576) le produit des roues *A*, *B*, *C* est égal au produit des pignons *F*, *G*, *H* multiplié par le nombre des tours que le pignon *H* fait pendant

un tour de la roue A. Ainsi l'on aura cette égalité $A \times B \times C = 730 \frac{149}{720} \times F \times G \times H$.

Comme les nombres des dents des roues ne doivent point contenir de fractions, il faut que la valeur $730 \frac{149}{720} \times F \times G \times H$ de leur produit soit un nombre entier. Ainsi en multipliant le nombre $730 \frac{149}{720}$ par le produit $F \times G \times H$ des pignons, la fraction qui a pour dénominateur 720 doit devenir un nombre entier; & par conséquent ce produit $F \times G \times H$ des pignons doit être égal à 720 ou être un multiple de 720.

Si l'on faisoit le produit $F \times G \times H$ des pignons égal au nombre 720 qu'on peut décomposer en ces trois facteurs 8, 9, 10 qui peuvent être pris pour les nombres des aîles de ces pignons, l'équation $A \times B \times C = 730 \frac{149}{720} \times F \times G \times H$ deviendroit $A \times B \times C = 525949$. Or le nombre 525949 qu'on trouve pour le produit des nombres des dents des trois roues A, B, C ne pouvant point se décomposer en trois facteurs qui puissent être les nombres des dents de ces roues, on doit conclurre qu'il n'est pas possible de faire faire à la roue A un tour en 365 jours 5 heures 49 minutes.

Si l'on prenoit pour le produit des pignons un nombre multiple de 720, on n'y gagneroit rien; car on trouveroit pour le produit des roues A, B, C un nombre multiple de 525949; & ce multiple ne pourroit pas se décomposer mieux que 525949.

Comme le nombre $730 \frac{149}{720}$ multiplié par tout autre produit de pignons que 720 ou qu'un multiple de 720, ne donnera pas un produit sans fraction pour celui des roues, & qu'il faut négliger les fractions dans le produit des roues A, B, C; on est

obligé de chercher pour le produit $F \times G \times H$ des pignons un nombre entier qui, étant multiplié par $730 \frac{349}{720}$, donne un produit le plus approchant qu'il est possible d'un nombre entier. Ordinairement on fait cette recherche en tâtonnant; mais comme il est difficile que par ce moyen qui n'est point une méthode, on réussisse à négliger le moins qu'il est possible, quoiqu'on parvienne à trouver des nombres qui donnent à très-peu près ce qu'on demande, on va proposer une méthode par laquelle on résoudra sûrement le Problème.

Lorsque pour avoir la valeur du produit $A \times B \times C$ des roues, ou pour en approcher le plus près qu'il sera possible, on aura multiplié $730 \frac{349}{720}$ par le produit $F \times G \times H$ des pignons qui sera un entier; le produit qu'on trouvera sera composé de ces deux parties $730 \times F \times G \times H$, & $\frac{349 \times F \times G \times H}{720}$. Or la première partie $730 \times F \times G \times H$ de ce produit sera un nombre entier, puisque ses deux facteurs 730 & $F \times G \times H$ sont des entiers. Ainsi il faut faire en sorte que la seconde partie $\frac{349 \times F \times G \times H}{720}$ approche le plus près qu'il est possible d'un nombre entier.

Pour que la fraction $\frac{349 \times F \times G \times H}{720}$ approche le plus près qu'il est possible d'un nombre entier, il faut que son numérateur qui est entier ne soit que d'une unité trop grand ou trop petit pour être divisible par son dénominateur 720. Or en supposant que ce numérateur est trop grand d'une unité, & le diminuant de cette unité, on aura $\frac{349 \times F \times G \times H - 1}{720}$

égal à un nombre entier. Ainſi en repréſentant ce nombre entier par S, on aura $\frac{349 \times F \times G \times H - 1}{720} = S$.

Multipliant chaque membre de cette égalité par 720, on aura $349 \times F \times G \times H - 1 = 720\,S$. Puis ajoûtant 1 à chaque membre de cette dernière égalité, & diviſant enſuite chacun de ſes nouveaux membres par 349, on la réduira à celle-ci $F \times G \times H = \frac{720\,S + 1}{349}$.

Le produit $F \times G \times H$ des pignons, qui compoſe le premier membre de la dernière égalité, étant un nombre entier, le ſecond membre $\frac{720\,S + 1}{349}$ de la même égalité ſera auſſi un nombre entier. Mais ce nombre entier $\frac{720\,S + 1}{349}$ eſt compoſé de deux parties $\frac{698\,S}{349}$, $\frac{22\,S + 1}{349}$, & la première de ces deux parties eſt un nombre entier, parce qu'elle eſt égale à $2\,S$; ainſi la ſeconde partie $\frac{22\,S + 1}{349}$ eſt auſſi un nombre entier qu'on repréſentera par T pour avoir une nouvelle égalité $\frac{22\,S + 1}{349} = T$.

Multipliant d'abord les deux membres de cette égalité par 349, puis retranchant 1 des deux nouveaux membres, & les diviſant enſuite par 22; on aura $S = \frac{349\,T - 1}{22}$.

Or la lettre S qui fait le premier membre de cette égalité a été priſe pour repréſenter un nombre

entier ; ainsi le second membre $\frac{349\,T - 1}{22}$ sera aussi un nombre entier. Mais ce nombre entier $\frac{349\,T - 1}{22}$ est composé de ces deux parties $\frac{330\,T}{22}$, $\frac{19\,T - 1}{22}$ dont la première est un nombre entier, puisqu'elle est égale à 15 *T* & que *T* représente un nombre entier ; ainsi la seconde partie $\frac{19\,T - 1}{22}$ est aussi un nombre entier qu'on représentera par *V* pour avoir encore une nouvelle ègalité $\frac{19\,T - 1}{22} = V$.

Les deux membres de cette dernière égalité étant d'abord multipliés par 22, puis augmentés d'une unité, & divisés ensuite par 19, on aura $T = \frac{22\,V + 1}{19}$: & comme *T* représente un nombre entier, $\frac{22\,V + 1}{19}$ sera un nombre entier.

Mais l'entier $\frac{22\,V + 1}{19}$ est composé de ces deux parties $\frac{19\,V}{19}$, $\frac{3\,V + 1}{19}$, & la première partie $\frac{19\,V}{19}$ étant égale à *V* est un nombre entier ; ainsi la seconde partie $\frac{3\,V + 1}{19}$ est aussi un nombre entier qu'on représentera par *X* pour avoir encore une égalité $\frac{3\,V + 1}{19} = X$.

Les deux membres de cette égalité étant multipliés par 19, diminués ensuite d'une unité, & divisés enfin par 3 ; on aura $V = \frac{19\,X - 1}{3}$. Et comme

V représente un nombre entier, $\frac{19X-1}{3}$ représentera aussi un entier.

Mais l'entier $\frac{19X-1}{3}$ est composé de ces deux parties $\frac{18X}{3}$ & $\frac{X-1}{3}$ dont la première est un nombre entier; ainsi la seconde $\frac{X-1}{3}$ sera aussi un entier ou égale à zéro.

Si l'on fait $\frac{X-1}{3} = zéro$, on aura $X = 1$, & l'on trouvera le produit $F \times G \times H$ des pignons par de simples substitutions.

Car mettant 1 pour X dans l'équation $V = \frac{19X-1}{3}$, l'on trouvera $V = 6$.

Puis en mettant 6 pour V dans l'égalité $T = \frac{22V+1}{19}$, on en déduira $T = 7$.

Ensuite en mettant 7 pour T dans l'équation $S = \frac{349T-1}{22}$, on aura $S = 111$.

Enfin mettant 111 pour S dans l'équation $F \times G \times H = \frac{720S+1}{349}$, on trouvera le produit des pignons $F \times G \times H = 229$.

Comme le nombre 229 qu'on vient de trouver pour la valeur du produit $F \times G \times H$ des pignons est un nombre simple qu'on ne sauroit décomposer en plusieurs facteurs, & qu'il excède le nombre des aîles qu'on peut donner à un pignon, il en faut chercher un autre plus convenable.

Si au lieu de faire $\frac{X-1}{3}$ égal à zéro, on l'eût égalé successivement à 1, à 2, à 3, &c. on auroit trouvé pour le produit $F \times G \times H$ des pignons d'autres nombres 949, 1669, 2389, &c. faits de l'addition continuelle de 720 à 229 : mais ces nouveaux produits étant simples, ou composés de facteurs trop grands pour être les nombres des aîles des pignons, ou donnant pour le produit des roues des nombres composés de facteurs trop grands, on ne pourroit point en faire usage. Au reste cet article n'est point démontré, parce qu'il n'y a point de règles pour juger si un nombre résultant de ces compositions, sera simple ou composé de plusieurs facteurs d'une certaine grandeur.

Le nombre 229 ne pouvant point être le produit de plusieurs pignons F, G, H, on en cherchera un autre qui étant multiplié par 349 donne un produit trop grand de 2 ou de 3 pour être divisible par 720; c'est-à-dire qu'on fera $\frac{349 \times F \times G \times H - 2}{720}$, ou $\frac{349 \times F \times G \times H - 3}{720}$ égal à un nombre entier représenté par S, en répétant les opérations qu'on vient d'expliquer dans le cas où l'on vouloit que $\frac{349 \times F \times G \times H - 1}{720}$ fût un nombre entier : & l'on aura les équations suivantes qui ne seront différentes des premières, qu'en ce qu'elles contiendront $+ 2$ & $- 2$ ou $+ 3$ & $- 3$, à la place de $+ 1$ & $- 1$ que les premières avoient.

$$\left.\begin{array}{l} F\times G\times H=\frac{720\,S+2}{349} \\ S=\frac{349\,T-2}{22} \\ T=\frac{22\,V+2}{19} \\ V=\frac{19\,X-2}{3} \\ X=2 \end{array}\right\}\text{ ou }\left\{\begin{array}{l} F\times G\times H=\frac{720\,S+3}{349} \\ S=\frac{349\,T-3}{22} \\ T=\frac{22\,V+3}{19} \\ V=\frac{19\,X-3}{3} \\ X=3 \end{array}\right.$$

Or si pour trouver la valeur du produit $F\times G\times H$ des pignons, l'on substitue dans ces deux nouvelles suites d'équations, 2 ou 3 à la place de X dans la valeur de V, puis la valeur de V dans celle de T, ensuite celle de T dans celle de S, & enfin celle de S dans celle du produit $F\times G\times H$ des pignons; on trouvera pour ce produit 458 qui est double de 229, ou 687 qui est triple de 229 : & comme on a rejeté 229, attendu qu'il est indécomposable & trop grand pour être le nombre des aîles d'un pignon, il faudra pareillement rejeter les deux nombres 458 & 687 qui ont tous deux le même nombre 229 pour un de leurs facteurs.

Mais si l'on cherche pour le produit $F\times G\times H$ des pignons un nombre qui étant multiplié par 349 donne un produit trop grand de 4 unités pour être divisible par 720, c'est-à-dire si l'on veut que $\frac{349\times F\times G\times H-4}{720}$ soit un nombre entier; on aura les équations suivantes qui ne différeront des premières, qu'en ce qu'elles contiendront $+4$ ou -4, au lieu que les premières contenoient $+1$ ou -1.

$F\times G\times H$

$$F \times G \times H = \frac{720\,S + 4}{349}$$

$$S = \frac{349\,T - 4}{22}$$

$$T = \frac{22\,V + 4}{19}$$

$$V = \frac{19\,X - 4}{3}.$$

Et comme la valeur $\frac{19\,X - 4}{3}$ du nombre entier V est composée de ces deux parties $\frac{18\,X - 3}{3}$, $\frac{X - 1}{3}$, & que la première $\frac{18\,X - 3}{3}$ de ces deux parties est un nombre entier, la seconde partie $\frac{X - 1}{3}$ sera aussi un nombre entier ou égale à zéro.

Or si l'on fait $\frac{X - 1}{3} = 0$, on aura $X = 1$.

Substituant 1 pour X dans $\frac{19\,X - 4}{3}$ valeur de V, on aura . . . . $V = 5$.

Mettant 5 pour V dans $\frac{22\,V + 4}{19}$ valeur de T, on trouvera . . . . $T = 6$.

Mettant 6 pour T dans $\frac{349\,T - 4}{22}$ valeur de S, on aura . . . . $S = 95$.

Enfin mettant 95 pour S dans $\frac{720\,S + 4}{349}$ valeur de $F \times G \times H$, on aura $F \times G \times H = 196$.

Or le nombre 196 qu'on vient de trouver pour la valeur du produit $F \times G \times H$ des pignons, est décomposable en ces trois facteurs 4, 7, 7 qui

peuvent être les nombres des aîles de ces trois pignons ; ainſi ces pignons ſont déterminés.

Pour déterminer les nombres des dents des trois roues *A*, *B*, *C*, on reprendra (*page* 410) l'équation $A \times B \times C = 730 \frac{149}{720} \times F \times G \times H$ qu'on a trouvée dès le commencement de la Solution ; & mettant 196 pour le produit $F \times G \times H$, on trouvera $A \times B \times C = 143175 \frac{4}{720}$: & négligeant la fraction $\frac{4}{720}$ qu'on ſe propoſoit de rejeter, on aura pour le produit des roues *A*, *B*, *C* le nombre 143175 qu'on décompoſera aiſément en ces trois facteurs 25, 69, 83 qui peuvent être les nombres des dents des trois roues *A*, *B*, *C*.

Ainſi, pour faire faire à une roue *A* un tour en 365 jours 5 heures 49 minutes à très-peu de choſe près, au moyen d'un rouage mené par un pignon *H* placé ſur la roue de 12 heures d'une horloge, on pourra employer trois roues *A*, *B*, *C* dont les nombres des dents ſeront 25, 69, 83, & trois pignons *F*, *G*, *H* dont les nombres des aîles ſeront 4, 7, 7. C Q F. T.

1°. *On doit remarquer que la fraction* $\frac{4}{720}$ *qu'on a négligée dans le produit des roues, ne cauſera pas ſur la durée de la révolution demandée, une erreur de* 11'' 14''' ; & *qu'il faudroit près de* 320 $\frac{1}{2}$ *ans pour que cette erreur, en ſe multipliant, pût monter à une heure : ce qui ne ſeroit point encore ſenſible dans un mouvement auſſi lent que celui de la roue* A. *Car il eſt évident que ſi l'on cherche le nombre des tours que le pignon* H *ſera pendant un tour de la roue* A, *en diviſant le produit* 143175 *des trois roues* A, B, C *par le produit* 196 *des trois pignons* F, G, H, *on trouvera que ce pignon* H *fera* 730 *tours qui répon-*

dent à 365 jours, & qu'il restera 95 tours qui répondent à 95 fois 12 heures ou à 1140 heures, à diviser par 196. Or en divisant 1140 heures par 196, on trouvera 5 heures, & il restera 160 heures ou 9600 minutes à diviser par 196. Continuant de diviser ces 9600 minutes par 196, on trouvera 48 minutes, avec un reste de 192 minutes ou de 11520 secondes, lequel étant divisé par 196 donnera 58 secondes, avec un reste de 152 secondes ou de 9120 tierces, qui étant divisé par 196 donnera encore plus de 46 tierces. Ainsi le temps que la roue A emploiera à faire une révolution, sera de 365 jours 5 heures 48 minutes 48 secondes 46 tierces & plus, & ne sera par conséquent pas moindre de 11'' 14''' que le temps proposé.

2°. On doit encore remarquer que l'année tropique est plus courte d'environ 2 secondes que 365 jours 5 heures 49 minutes qu'on a proposés pour l'année moyenne; ainsi le temps que la roue A emploiera à faire une révolution, approchera autant qu'on peut le desirer de la durée de l'année moyenne.

3°. Enfin, il faut encore remarquer qu'en cherchant pour le produit $F \times G \times H$ des pignons un nombre qui étant multiplié par $730 \frac{349}{720}$ donne un produit le plus approchant qu'il est possible d'un nombre entier, on a mieux aimé rendre le numérateur de la fraction $\frac{349 \times F \times G \times H}{720}$ de 1 ou 2 ou 3 ou 4 unités plus grand qu'un nombre divisible par 720, que de le prendre plus petit; parce qu'on savoit que le temps proposé pour la durée de l'année moyenne ou tropique, devoit être diminué plustôt qu'augmenté. D'ailleurs, si l'on avoit cherché à augmenter cette durée, en rendant $\frac{349 \times F \times G \times H + 1}{720}$

ou $\frac{349 \times F \times G \times H + 2}{720}$ *ou* $\frac{349 \times F \times G \times H + 3}{720}$ *égal à un nombre entier, on auroit aussi mal réussi à trouver des nombres convenables pour le produit des roues & celui des pignons, qu'on a fait en supposant* $\frac{349 \times F \times G \times H - 1}{720}$ *ou* $\frac{349 \times F \times G \times H - 2}{720}$ *ou* $\frac{349 \times F \times G \times H - 3}{720}$ *égal à un nombre entier.*

PROBLEME.

582. *Trouver les nombres des dents & des ailes des roues & des pignons d'un rouage qui, étant mené par un pignon placé sur la tige de la roue des minutes d'une horloge, fasse faire un tour à une roue en 29 jours 12 heures 44 minutes 3 secondes 12 tierces, qui composent la durée d'une révolution synodique moyenne de la lune.*

Solution.

Fig, 212. Soient *A* la roue qui doit faire un tour en 29 jours $12^h\ 44'\ 3''\ 12'''$; *H* le pignon qui, étant placé sur la tige de la roue des minutes, fera comme cette roue un tour par heure; & *B*, *C*, *F*, *G* deux autres roues & deux autres pignons, par le moyen desquels le mouvement du pignon *H* sera communiqué à la roue *A*.

Le pignon *H* faisant 1 tour par heure ou 24 tours par jour, fera 696 tours en 29 jours, & 708 tours en 29 jours 12 heures.

La minute étant $\frac{1}{60}$ ou $\frac{3600}{216000}$ d'heure, le pignon *H* fera $\frac{158400}{216000}$ tours en 44 minutes.

La seconde étant $\frac{1}{3600}$ ou $\frac{60}{216000}$ de 1 heure, le pignon *H* fera $\frac{180}{216000}$ tours en 3 secondes.

Enfin la tierce étant $\frac{1}{216000}$ de 1 heure, le pignon *H* fera $\frac{12}{216000}$ tours en 12 tierces.

Ainsi pendant que la roue *A* fera un tour, le pignon *H* fera 708 $\frac{158592}{216000}$ tours, ou (en divisant les deux termes de la fraction par 192) 708 $\frac{826}{1125}$ tours.

Mais (n°. 576) le produit $A \times B \times C$ des roues est égal au produit $F \times G \times H$ des pignons multiplié par le nombre des tours que le pignon *H* fait pendant un tour de la roue *A*. On aura donc $A \times B \times C = F \times G \times H \times 708 \frac{826}{1125}$.

Ainsi lorsqu'on voudra que la roue *A* fasse exactement son tour en 29 jours 12 h 44′ 3″ 12‴, il faudra prendre pour le produit $F \times G \times H$ des pignons un nombre qui soit égal au dénominateur de la fraction $\frac{826}{1125}$, ou qui soit multiple de ce dénominateur.

Mais en prenant le nombre 1125 pour la valeur du produit $F \times G \times H$ des pignons, & le substituant à la place de ce produit dans l'équation $A \times B \times C = F \times G \times H \times 708 \frac{826}{1125}$, on trouve pour la valeur du produit $A \times B \times C$ des roues, le nombre 797326 qu'on ne sauroit décomposer en facteurs qui puissent être les nombres des dents de deux ou trois roues. Ainsi on ne peut pas faire faire à la roue *A* un tour en 29 jours 12 h 44′ 3″ 12‴, & l'on est réduit à chercher pour le produit $F \times G \times H$ des pignons un nombre entier qui, étant multiplié par 708 $\frac{826}{1125}$, donne un produit le plus approchant qu'il est possible d'un nombre entier.

Lorsque pour avoir le produit des roues, ou pour en approcher, on aura multiplié 708 $\frac{826}{1125}$

par le produit $F \times G \times H$ des pignons, le produit qu'on trouvera sera composé de ces deux parties $708 \times F \times G \times H$, $\frac{826 \times F \times G \times H}{1125}$. Or comme la première partie $708 \times F \times G \times H$ sera un nombre entier, & que la somme de ces deux parties doit approcher le plus près qu'il est possible d'un nombre entier, il faudra faire en sorte que la seconde partie $\frac{826 \times F \times G \times H}{1125}$ approche aussi le plus près qu'il est possible d'un nombre entier.

Pour que la fraction $\frac{826 \times F \times G \times H}{1125}$ diffère le moins qu'il est possible d'un nombre entier, il faut que son numérateur ne soit que d'une unité trop grand ou trop petit pour être divisible par 1125. Mais en faisant ce numérateur plus grand ou plus petit d'une unité, & même de 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7 ou 8 unités, qu'un nombre divisible par 1125, on trouve pour le produit $A \times B \times C$ des roues des nombres dont quelques facteurs sont trop grands pour être les nombres des dents de quelques-unes des roues ; & l'on est obligé de faire en sorte que le numérateur de cette fraction soit de 9 unités trop petit pour être divisible par 1125 ; c'est-à-dire qu'après avoir ajoûté 9 au numérateur $826 \times F \times G \times H$, on suppose la nouvelle fraction $\frac{826 \times F \times G \times H + 9}{1125}$ égale à un nombre entier qu'on représente par S, ce qui donne cette égalité $\frac{826 \times F \times G \times H + 9}{1125} = S$.

Multipliant par 1125 les deux membres de cette équation, ôtant ensuite 9 de chacun, & divisant les membres restans par 826, on aura l'équation $F \times G \times H = \frac{1125 S - 9}{826}$.

Le premier membre $F \times G \times H$ de cette égalité ne pouvant être qu'un nombre entier, le second membre $\frac{1125 S - 9}{826}$ sera aussi un entier.

Mais ce nombre entier est composé de deux parties $\frac{826 S}{826}$, $\frac{299 S - 9}{826}$, & la première de ces deux parties est un nombre entier, puisqu'elle est égale à S; ainsi la seconde partie $\frac{299 S - 9}{826}$ est aussi un nombre entier.

Soit représenté ce dernier nombre entier par T: on aura $\frac{299 S - 9}{826} = T$. Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par 826, qu'ensuite on leur ajoûte 9, & qu'enfin on les divise par 299, on trouvera $S = \frac{826 T + 9}{299}$.

Or le premier membre S de cette égalité représentant un nombre entier, le second membre $\frac{826 T + 9}{299}$ représentera aussi un nombre entier; & comme ce membre est composé de ces deux parties $\frac{598 T}{299}$, $\frac{228 T + 9}{299}$ dont la première est un entier puisqu'elle est égale à $2 T$, la seconde partie $\frac{228 T + 9}{299}$ sera nécessairement un entier.

Soit représenté ce dernier entier par V : on aura $\frac{228\,T + 9}{199} = V$. Puis multipliant chaque membre de cette équation par 299, ôtant ensuite 9 & divisant par 228, on aura $T = \frac{199\,V - 9}{228}$.

Le premier membre T de cette nouvelle égalité ayant été pris pour un nombre entier, le second membre $\frac{299\,V - 9}{228}$ sera aussi un entier. Or ce nombre entier étant composé de ces deux parties $\frac{228\,V}{228}$, & $\frac{71\,V - 9}{228}$ dont la première qui est égale à V est un nombre entier, la seconde partie $\frac{71\,V - 9}{228}$ sera aussi un nombre entier.

Soit représenté ce nouvel entier par X : on aura cette équation $\frac{71\,V - 9}{228} = X$ dont on multipliera les deux membres par 228 ; ensuite on leur ajoûtera 9, & ayant divisé chaque nouveau membre par 71, on aura $V = \frac{228\,X + 9}{71}$.

Le premier membre V de cette égalité étant entier, le second $\frac{228\,X + 9}{71}$ le sera aussi ; & comme il est composé de deux parties $\frac{213\,X}{71}$, $\frac{15\,X + 9}{71}$, dont la première est un entier, la seconde $\frac{15\,X + 2}{71}$ sera aussi un entier.

Soit représenté ce dernier entier par Y : on aura

cette équation $\frac{15X+9}{71}=Y$ dont on multipliera d'abord les deux membres par 71 ; enſuite on en retranchera 9, & l'on diviſera les deux reſtes égaux par 15, ce qui donnera $X=\frac{71Y-9}{15}$.

Le premier membre X de cette dernière égalité étant entier, le ſecond $\frac{71Y-9}{15}$ le ſera auſſi ; & comme on peut le compoſer de ces deux parties $\frac{60Y}{15}$, $\frac{11Y-9}{15}$ dont la première eſt un entier, la ſeconde $\frac{11Y-9}{15}$ ſera auſſi un entier.

Soit encore repréſenté le dernier entier par Z: on aura l'équation $\frac{11Y-9}{15}=Z$ dont on multipliera les deux membres par 15; enſuite on leur ajoûtera 9, & on les diviſera par 11, ce qui donnera $Y=\frac{15Z+9}{11}$.

Or le premier membre de cette équation étant entier, le ſecond $\frac{15Z+9}{11}$ le ſera auſſi; & comme il eſt compoſé des deux parties $\frac{11Z}{11}$, $\frac{4Z+9}{11}$ dont la première eſt un entier, la ſeconde $\frac{4Z+9}{11}$ ſera auſſi un entier.

Enfin ſoit repréſenté le dernier entier par &: on aura l'égalité $\frac{4Z+9}{11}=\&$, d'où l'on tirera $Z=\frac{11\&-9}{4}$.

Mais le premier membre Z de cette équation étant entier, le second $\frac{11\,\& - 9}{4}$ le sera aussi; & comme il est composé des deux parties $\frac{8\,\& - 8}{4}$, $\frac{3\,\& - 1}{4}$ dont la première est un entier, la seconde $\frac{3\,\& - 1}{4}$ sera aussi un entier.

Le dernier entier pouvant être égalé à 2, on aura $\frac{3\,\& - 1}{4} = 2$, ou $3\,\& - 1 = 8$, ou $3\,\& = 9$; dont on tirera $\& = 3$.

On aura donc les neuf égalités suivantes qui donneront les valeurs des produits $A \times B \times C$, $F \times G \times H$ des roues & des pignons par de simples substitutions.

1°. . . . . . . $\& = 3$

2°. . . . . . . $Z = \frac{11\,\& - 9}{4}$

3°. . . . . . . $Y = \frac{15\,Z + 9}{11}$

4°. . . . . . . $X = \frac{71\,Y - 9}{15}$

5°. . . . . . . $V = \frac{228\,X + 9}{71}$

6°. . . . . . . $T = \frac{299\,V - 9}{228}$

7°. . . . . . . $S = \frac{826\,T + 9}{299}$

8°. $F \times G \times H = \frac{1125\,S - 9}{826}$

9°. $A \times B \times C = F \times G \times H \times 708\frac{826}{1125}$.

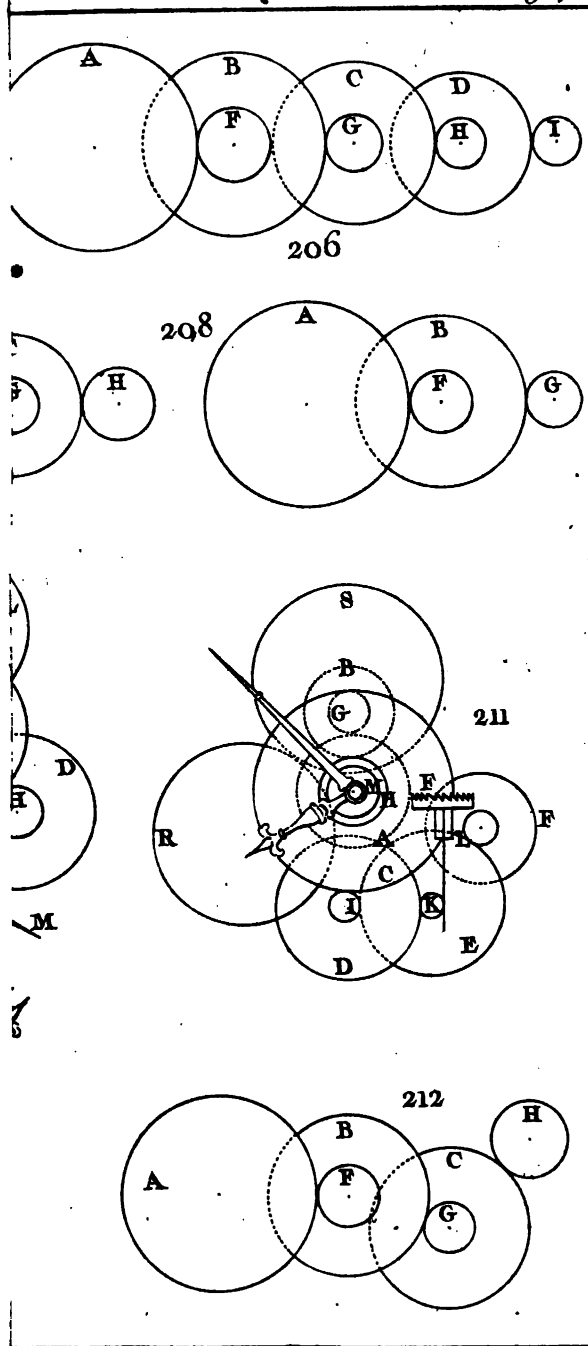
La 1re de ces équations donnant . . . . . . & = 3
Si l'on met 3 pour & dans la 2e on aura . . $Z =$ 6
Mettant 6 pour Z dans la 3e on aura . . . . $Y =$ 9
Mettant 9 pour Y dans la 4e on aura . . . . $X =$ 42
Mettant 42 pour X dans la 5e on aura . . $V =$ 135
Mettant 135 pour V dans la 6e on aura . . $T =$ 177
Mettant 177 pour T dans la 7e on aura . . $S =$ 489
Mettant 489 pour S dans la 8e on aura $F \times G \times H =$ 666
Enfin mettant 666 pour $F \times G \times H$ dans
la 9e on aura . . . . $A \times B \times C = 472017 - \frac{9}{1125}$

Le nombre 666 qu'on a trouvé pour la valeur du produit $F \times G \times H$ des pignons, étant composé de ces quatre facteurs 2, 3, 3, 37 réductibles à ces trois autres 3, 6, 37 qui peuvent être les nombres des alles de trois pignons; & le nombre 472017 qu'on a trouvé pour le produit des roues, en négligeant la fraction négative $-\frac{9}{1125}$, étant composé de ces facteurs 3, 7, 7, 13, 13, 19 qu'on peut partager en ces trois bandes (3, 19), (7, 13), (7, 13), & réduire à ces trois facteurs 57, 91, 91 qui peuvent être les nombres des dents de trois roues; il est démontré que le Problème est résolu. C. Q. F. T.

On doit remarquer que la fraction négative $-\frac{9}{1125}$ *qu'on néglige dans le produit des roues, & dont on rend ce produit plus grand qu'il ne doit être, pour faire faire à la roue* A *un tour en* 29^j 12^h 44′ 3″ 12‴, *ne causera sur le temps de la révolution de cette roue, qu'une erreur de* $2''' \frac{22}{37}$. *Car si l'on cherche le nombre des tours que le pignon* H *fera pendant un tour de la roue* A, *en divisant le produit* 472017 *des roues par le produit* 666 *des pignons, on trouvera que ce pignon* H *qui fait un tour par heure, fera* 708 *révolutions qui répondent à* 708 *heures ou à* 29 *jours*

12 heures, & qu'il restera 489 tours ou 489 heures, lesquelles étant divisées par 666, donneront encore 44' 3'' 14''' $\frac{22}{37}$. Ainsi le temps que la roue A emploiera pour faire une révolution, sera de 29 j 12 h 44' 3'' 14''' $\frac{22}{37}$, & n'excèdera par conséquent que de 2''' $\frac{22}{37}$ le temps proposé.

Fin des Élémens de la Méchanique Statique.


A
B
C
D
F
G
H
I
206
208
A
B
H
F
G
S
B
G
211
M
F
H
R
A
E
F
C
I
K
E
D
212
H
B
C
A
F
G

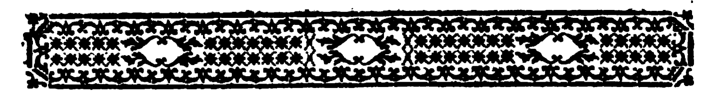


TABLE.

LIVRE III.

De la Machine funiculaire.

LIVRE IV.

DES LEVIERS.

LIVRE V.

DES POULIES ET DES MOUFLES.

LIVRE VI.

DU TOUR OU TREUIL, ET DES ROUES DENTÉES EN GÉNÉRAL.

LIVRE VII.

DES POIDS SOUTENUS SUR DES SURFACES INCLINÉES.

THÉOREME.

LIVRE VIII.

DE LA VIS.

LIVRE IX.

DU COIN.

LIVRE X.

LIVRE XI.